Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung mit 3 unabhängigen Variabeln.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt

von

Willy Kodweiß
aus Alpirsbach im Schwarzwald.

ACAD
LUGD BAT.
BIBL.

Tübingen
Druck von H. Laupp jr
1913.

Von der Fakultät angenommen am 12. November 1910.

Meinen Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547017_0085

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Kapitel. Historische Entwicklung der Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung 3

II. Kapitel. Integrationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

§ 1. Herleitung der Gleichung I aus dem Zwischenintegral 17
§ 2. Herleitung des Integrationssystems 18
§ 3. Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten der Gleichung III 20
§ 4. Das System von partiellen Differentialgleichungen 23
§ 5. Die Integrale des Systems (S_1) 24
§ 6. Herleitung der Gleichung I aus dem allgemeinen Integral . . . 28

III. Kapitel. Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

§ 1. Invarianz der Monge-Ampèreschen Form einer Differentialgleichung 32
§ 2. Invarianz der Bedingungsgleichungen (7) 34
§ 3. Invarianz der Systeme IV und V 35
§ 4. Invarianz der Bedingungen $A_{ik} \mp A_{ki}$, $B_{ik} \mp B_{ki}$ 38
§ 5. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \equiv\!\!\mid\!\!\equiv (S_2)$ ist und die keine Zwischenintegrale besitzt . . . 40
§ 6. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \equiv\!\!\mid\!\!\equiv (S_2)$ ist und die Zwischenintegrale besitzt 43
§ 7. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \equiv (S_2)$ ist 46
§ 8. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen, die keine ersten Integrale besitzen 47

Die vorliegende Arbeit enthält eine Theorie der Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichung mit 3 unabhängigen Variabeln; diese Gleichung ist von der 2. Ordnung und vom 3. Grad und stellt eine Verallgemeinerung der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung mit 2 unabhängigen Variabeln dar; sie ist von der Form:

$$A_{11}p_{11}+A_{22}p_{22}+A_{33}p_{33}+2A_{12}p_{12}+2A_{23}p_{23}+2A_{31}p_{31}$$
$$+B_{11}\Delta_{11}+B_{22}\Delta_{22}+B_{33}\Delta_{33}+2B_{12}\Delta_{12}+2B_{23}\Delta_{23}+2B_{31}\Delta_{31}+C\Delta+D=0. \quad \text{I.}$$

Bezeichnet man die abhängige Variable mit z und die 3 unabhängigen Variabeln mit x_1, x_2, x_3 und ist: $\frac{\partial z}{\partial x_i}=p_i$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}=p_{ik}$, so sind in der Gleichung I die Größen

A_{11}, A_{22}, . . . A_{31}; B_{11}, B_{22} . . . B_{31}; C und D Funktionen von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 und die Δ_{11}, Δ_{22}, . . . Δ_{31} stellen die zu p_{11}, p_{22}, . . . p_{31} gehörigen Unterdeterminanten der Determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \quad \text{dar.}$$

Das Ziel der Arbeit ist, zu zeigen, daß sich die Integrations- und Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung mit 2 unabhängigen Variabeln auf die Gleichung I ausdehnen läßt, wenn zwischen den Koeffizienten A_{11} . . D gewisse Bedingungsgleichungen bestehen. Das 1. Kapitel der Arbeit enthält eine historische Entwicklung der Theorie der Gleichung I; es ist daraus im Vergleich mit den beiden nächsten Kapiteln ersichtlich, was ich der Theorie unserer Differentialgleichung Neues hinzugefügt habe. Das 2. Kapitel enthält eine systematische Darstellung der Integrationstheorie, bei der namentlich auf die Integrabilitätsbedingungen näher eingegangen wurde. Im 3. Kapitel wird gezeigt, daß die Transformationstheorie der Gleichung I vollständig von Lies Theorie der Berührungstransformationen und der Funktionengruppen beherrscht wird. Abgesehen von einigen Resultaten, die sich schon bei Vivanti und Goursat finden, sind die Ableitungen

dieses Kapitels neu. Bei der Anlage der Arbeit diente mir die Dissertation von W. Müller*): Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichung II. Ordnung: $Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$, der ich manche Anregung verdanke als Vorbild; bei den Entwicklungen in § 2 bis § 4 des 3. Kapitels war mir ein Aufsatz von Kürschák**) von Wert.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meines hochverehrten Lehrers, des verstorbenen Prof. Dr. v. Stahl, der dieser Arbeit stets sein Interesse entgegengebracht hat, in dankbarer Erinnerung zu gedenken und Herrn Prof. Dr. Maurer für seine freundlichen Ratschläge bestens zu danken.

---

*) Leipzig 1895.

**) Zur Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung. Math. Annalen Bd. 61. 1905. p. 109—116.

I. Kapitel.

Historische Entwicklung der Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung I tritt zum erstenmal bei L. Tanner auf. Im ersten Teil seiner Abhandlung: „The solution of partial differential equations of the second order, with any number of variables, when there is a general first integral“ [1]) gibt er [2]) die Form der Monge-Ampèreschen Gleichung mit n unabhängigen Variabeln, woraus sich als Spezialfall die Gleichung I [3]) ergibt.

Wir wenden im Folgenden seine für n Variable durchgeführten Betrachtungen auf den Fall von 3 unabhängigen Variabeln an.

Tanner setzt die Existenz eines „Zwischenintegrals“ der Gleichung I voraus; ein solches ist von der Form: $\chi\ (u_1 u_2 u_3) = 0$, wobei χ eine willkürliche Funktion ist, und wo u_1, u_2 und u_3 bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 sind und die „ersten Integrale“ der Gleichung I vorstellen. Von diesem Zwischenintegral ausgehend, leitet er die zugehörige Differentialgleichung I ab, indem er nach x_1, x_2 und x_3 differentiiert und aus den dadurch entstehenden Gleichungen $\frac{d\chi}{du_1}$, $\frac{d\chi}{du_2}$ und $\frac{d\chi}{du_3}$ eliminiert. Es ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_1 \end{vmatrix} p_{11} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_2 \end{vmatrix} p_{22} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_3 \end{vmatrix} p_{33} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_1 \end{vmatrix} \right\} p_{12}$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_2 \end{vmatrix} \right\} p_{23} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_3 \end{vmatrix} \right\} p_{31} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_1 \end{vmatrix} \Delta_{11}$$
$$+ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_2 \end{vmatrix} \Delta_{22} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_3 \end{vmatrix} \Delta_{33} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_1 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{12} \qquad \text{II.}$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_2 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{23} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_3 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{31}$$
$$+ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ wobei:}$$

1) Proceedings of the London mathematical society. Vol. VII. 1876. p. 75—90.

2) Proc. p. 76—80. 3) Proc. p. 80.

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_1}{dx_3} & \frac{\partial u_1}{\partial p_1} \\ \frac{du_2}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_3} & \frac{\partial u_2}{\partial p_1} \\ \frac{du_3}{dx_2} & \frac{du_3}{dx_3} & \frac{\partial u_3}{\partial p_1} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_1 \end{pmatrix} \text{ usw. und } \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z} p_i \text{ ist}^{4}).$$

Die Gleichung II wollen wir in folgender abgekürzten Form schreiben:

$$A_{11} p_{11} + A_{22} p_{22} + A_{33} p_{33} + (A_{12} + A_{21}) p_{12} + (A_{23} + A_{32}) p_{23} + (A_{31} + A_{13}) p_{31} + B_{11} \Delta_{11} + B_{22} \Delta_{22} + B_{33} \Delta_{33} + (B_{12} + B_{21}) \Delta_{12} + (B_{23} + B_{32}) \Delta_{23} + (B_{31} + B_{13}) \Delta_{31} + C\Delta + D = 0. \qquad \text{III.}$$

Eine Gleichung von der Form I kann man jederzeit auf die Form III bringen, denn Tanner weist darauf hin, daß die Größen A_{23} und A_{32} die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 2x A_{23} + A_{33} A_{22} - B_{11} D = 0 \qquad \text{sind.}$$

Ganz entsprechend bestimmen sich die Größen A_{12}, A_{21}; A_{31}, A_{13}; B_{12}, B_{21}; B_{23}, B_{32}; B_{31}, B_{13} aus den Koeffizienten der Gleichung I [5]).

Tanner bemerkt, daß eine Gleichung von der Form III nicht notwendig ein Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ besitzen muß; soll sie ein solches besitzen, so muß sich die vorgelegte Gleichung, nachdem sie auf die Form III gebracht worden ist, mit der Gleichung II identifizieren lassen, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\lambda A_{1i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_i \end{pmatrix}; \quad \lambda A_{2i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_i \end{pmatrix}; \quad \lambda A_{3i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_i \end{pmatrix}; \\ &\lambda B_{1i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_i \end{pmatrix}; \quad \lambda B_{2i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_i \end{pmatrix}; \quad \lambda B_{3i} = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_i \end{pmatrix}; \qquad (1) \\ &\lambda D = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}; \quad \lambda C = \begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{pmatrix} \qquad \text{erfüllt sein.} \end{aligned}$$

Die 20 Koeffizienten der Gleichung III drücken sich demnach durch die 4 unabhängigen Größen u_1, u_2, u_3, λ aus und es müssen also zwischen den Größen A_{ik}, B_{ik}, C und D 16 Bedingungsgleichungen bestehen, wenn die gegebene Differentialgleichung ein Zwischenintegral besitzen soll. Wie man leicht einsieht, müssen zwischen den Koeffizienten der Gleichung I 10 Bedingungsgleichungen bestehen.

Im 2. Teil seiner Abhandlung führt Tanner die Integration der Gleichung I auf die Integration eines Systems von 3 partiellen

4) Diese Abkürzungen wollen wir in der ganzen Arbeit beibehalten.

5) Vgl. S. 22 vorliegender Arbeit.

linearen Differentialgleichungen zurück. Er geht aus von der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{\partial f}{\partial p_1} & \frac{\partial f}{\partial p_2} & \frac{\partial f}{\partial p_3} \\ \frac{du_1}{dx_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & \frac{\partial u_1}{\partial p_3} \\ \frac{du_2}{dx_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & \frac{\partial u_2}{\partial p_3} \\ \frac{du_3}{dx_1} & \frac{\partial u_3}{\partial p_1} & \frac{\partial u_3}{\partial p_2} & \frac{\partial u_3}{\partial p_3} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

die identisch befriedigt ist, wenn: $f = u_{i\,|\,i=1,2,3}$ ist.

Rechnet man die Determinante aus, so erhält man mit unserer früheren Bezeichnungsweise:

$$\frac{df}{dx_1}\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_1 \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_1 \end{pmatrix} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\begin{pmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_1 \end{pmatrix} = 0, \qquad (3)$$

oder: $$C \cdot \frac{df}{dx_1} - B_{11}\frac{\partial f}{\partial p_1} - B_{21}\frac{\partial f}{\partial p_2} - B_{31}\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Die Koeffizienten der Gleichung (3) lassen sich also durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung ausdrücken. Die Determinante (2) enthält nur 4 der 6 Ableitungen nach $x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$; da man nun auf dieselbe Weise wie oben aus je 4 andern dieser Ableitungen eine ganz analoge Determinante bilden kann, so wird man im ganzen 15 Determinanten erhalten und also auch 15 partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten sich, wie bei Gleichung (3), durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen. Tanner beweist nun, daß von diesen 15 Gleichungen je 3 und nur 3 Gleichungen voneinander unabhängig sind; es müssen also zwischen den Koeffizienten dieser 15 Gleichungen, d. h. zwischen den Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung gewisse Bedingungsgleichungen bestehen, welche offenbar mit einem Teil der schon oben erwähnten Bedingungsgleichungen identisch sein müssen. Die Integration der Differentialgleichung I ist jetzt auf die Integration eines Systems von irgend 3 der obigen 15 partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt.

Ersetzen wir in der Determinante (2) x_1 durch x_2 bzw. x_3, so erhalten wir z. B. das System:

$$\left.\begin{aligned} X_1(f) &\equiv \frac{df}{dx_1} C - \frac{\partial f}{\partial p_1} B_{11} - \frac{\partial f}{\partial p_2} B_{21} - \frac{\partial f}{\partial p_3} B_{31} = 0 \\ X_2(f) &\equiv \frac{df}{dx_2} C - \frac{\partial f}{\partial p_1} B_{12} - \frac{\partial f}{\partial p_2} B_{22} - \frac{\partial f}{\partial p_3} B_{32} = 0 \\ X_3(f) &\equiv \frac{df}{dx_3} C - \frac{\partial f}{\partial p_1} B_{13} - \frac{\partial f}{\partial p_2} B_{23} - \frac{\partial f}{\partial p_3} B_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (S_1)$$

das zur Lieferung der ersten Integrale u_1, u_2, u_3 dient.

Tanner bemerkt ferner, daß die Bedingungsgleichungen, die sich aus der Abhängigkeit der 15 partiellen Differentialgleichungen ergeben, zwar notwendig, aber nicht hinreichend dafür sind, daß die Gleichung I ein Zwischenintegral besitzt; die hinreichenden Bedingungen[6]) kann er jedoch nicht angeben.

Ohne Beweis stellt Tanner die richtige Behauptung auf, daß $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$ notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungsgleichungen dafür sind, daß das System (S_1) 4 Integrale u_1, u_2, u_3, u_4 besitzt. In diesem Fall ist der Ausdruck:

$$dz - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3$$

ein vollständiges Differential und stellt das Differential des 4. Integrals dar. Er stellt also hier den Satz auf: Ist $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$, und hat das System (S_1) 3 erste Integrale u_1, u_2, u_3, so hat es auch noch ein 4. Integral u_4.

Da sich die Größen B_{ik} und B_{ki} als Wurzeln von quadratischen Gleichungen ergeben, so gibt es außer dem Integrationssystem (S_1) noch ein zweites:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1(f) = \dfrac{df}{dx_1}C - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}B_{11} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}B_{12} - \dfrac{\partial f}{\partial p_3}B_{13} = 0 \\ Y_2(f) = \dfrac{df}{dx_2}C - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}B_{21} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}B_{22} - \dfrac{\partial f}{\partial p_3}B_{23} = 0 \\ Y_3(f) = \dfrac{df}{dx_3}C - \dfrac{\partial f}{\partial p_1}B_{31} - \dfrac{\partial f}{\partial p_2}B_{32} - \dfrac{\partial f}{\partial p_3}B_{33} = 0 \end{array}\right\} \qquad (S_2)$$

das aus dem System (S_1) hervorgeht, wenn man B_{ik} mit B_{ki} vertauscht.

Besitzt das System (S_2) auch 3 erste Integrale v_1, v_2, v_3, so hat die Gleichung I noch ein 2. Zwischenintegral $\chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0$.

Tanner hat versucht, Gleichungen von der Form I zu konstruieren, die 2 Paare von Zwischenintegralen besitzen; er findet jedoch an speziellen Beispielen, daß diese beiden Paare identisch sind, „but I am not prepared to prove that such is always the case". Aus dem 2. Kapitel § 5[7]) vorliegender Arbeit geht hervor, daß dies in der Tat immer der Fall sein muß.

Im 3. Kapitel beschäftigt sich Tanner mit der Aufstellung des 2. Integrals. Ist nur ein Zwischenintegral vorhanden, so sucht man Funktionen: $v(x_1 x_2 x_3 z p_1 p_2 p_3)$, welche die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx}{dx_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i}\frac{dv}{dx_i}\right) = 0$$

befriedigen. Im allgemeinen werden die Werte von v von der willkürlichen Funktion χ abhängen; man wird also in diesem Fall nur

6) S. S. 28 der vorl. Arbeit. 7) S. S. 26.

zu einem allgemeinen Integral gelangen, wenn man die willkürliche Funktion χ spezialisieren kann. Es kann aber auch vorkommen, daß die vorstehende Gleichung unabhängig von χ befriedigt ist; es werden alsdann die Koeffizienten von $\frac{dx}{du_i \mid i=1,2,3}$ verschwinden müssen und man hat:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{du_1}{dx_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{dv}{dx_i}\frac{\partial u_1}{\partial p_i}\right) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{du_2}{dx_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{dv}{dx_i}\frac{\partial u_2}{\partial p_i}\right) = 0 \text{ u.} \\ \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{du_3}{dx_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{dv}{dx_i}\frac{\partial u_3}{\partial p_i}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Eliminiert man aus diesen 3 Gleichungen je 2 der Größen $\frac{\partial v}{\partial p_i}$ und $\frac{dv}{dx_i}$, z. B. $\frac{\partial v}{\partial p_2}$, $\frac{\partial v}{\partial p_3}$ und $\frac{dv}{dx_1}$, $\frac{dv}{dx_2}$, so erhält man:

$$C\cdot\frac{dv}{dx_1} - B_{11}\frac{\partial v}{\partial p_1} - B_{12}\frac{\partial v}{\partial p_2} - B_{13}\frac{\partial v}{\partial p_3} = 0.$$

Auf ganz analoge Weise erhält man die beiden andern Gleichungen des Systems (S_2); die 3 Gleichungen (4) sind also indentisch mit dem System (S_2).

Tanner beweist demnach den Satz: Existiert ein Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$, wo u_1, u_2, u_3 die Integrale des Systems (S_1) sind und bestehen für eine Funktion $v(x_1 x_2 x_3 z p_1 p_2 p_3)$ die Gleichungen $[u_1 v] = 0$, $[u_2 v] = 0$, $[u_3 v] = 0$, wo [ ] den Poissonschen Klammerausdruck darstellt, so ist v eine Lösung des anderen Integrationssystems (S_2); hat man 3 solche Lösungen v_1, v_2 und v_3, so hat man noch ein 2. Zwischenintegral $\chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0$.

Auch wenn noch ein 2. Zwischenintegral existiert, kann Tanner nicht zu einem allgemeinen Integral gelangen, da die Methode, die Boole[8]) für die gewöhnliche Monge-Ampèresche Gleichung angibt, sich nicht ohne weiteres auf den Fall mit 3 unabhängigen Variabeln ausdehnen läßt.

Tanner schlägt deshalb vor, die Imschenetskysche Methode[9]) der Variation der Konstanten zu verallgemeinern; man müßte also ein vollständiges Integral: $z = f(x_1 x_2 x_3 a_1 a_2 a_3 a_4)$ suchen und die Größen

---

8) S. Boole, Treatise on differential equations 1859. p. 351—365 und Boole, Ueber eine partielle Differential-Gleichung 2. Ordnung: $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$. Crelles Journal Bd. 61. 1863. p. 309—333.

9) S. Imschenetsky, Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. Grunerts Archiv 54. Bd. 1872. p. 334—360.

a_1, a_2, a_3, a_4 als neue Variable an Stelle von x_1, x_2, x_3, z in die Monge-Ampèresche Gleichung einführen. Tanner hofft dadurch eine einfachere Gleichung zu erhalten. Wie wir später sehen werden [10]), ist dies auch richtig, es erscheint aber in den meisten Fällen als sehr fraglich, ob es uns gelingt, das allgemeine Integral dieser einfacheren Gleichung aufzufinden, da dieselbe, wie die vorgelegte Gleichung, auch nicht weiter als 2 Zwischenintegrale besitzt, von denen das allgemeine Integral abzuleiten ist.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung 2 zusammenfallende Zwischenintegrale besitzt, gelangt Tanner sehr leicht zum allgemeinen Integral. Er setzt die aus: $u_1 = a_1, u_2 = a_2$ und $u_3 = a_3$ berechneten Werte von p_1, p_2 und p_3 in den Ausdruck: $dz - p_1\,dx - p_2\,dx_2 - p_3\,dx_3$ ein; wie wir schon oben gesehen haben, ist dieser Ausdruck ein vollständiges Differential; sein Integral ist von der Form:

$$f(x_1\,x_2\,x_3\,z\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4) = 0$$

und stellt ein vollständiges Integral der gegebenen Differentialgleichung dar. Wie man von diesem vollständigen Integral zum allgemeinen Integral gelangt, zeigt Tanner an dem Beispiel:

$$x_1p_2p_3 \cdot p_{11} + x_2p_3p_1 \cdot p_{22} + x_3p_1p_2 \cdot p_{33} - p_1x_2x_3 \cdot \Delta_{11} - p_2x_3x_1 \cdot \Delta_{22} - p_3x_1x_2 \cdot \Delta_{33} + x_1x_2x_3 \cdot \Delta - p_1p_2p_3 = 0.$$

Die 2 zusammenfallenden Zwischenintegrale dieser Gleichung lauten:

$$\chi\left(\frac{p_1}{x_1}, \frac{p_2}{x_2}, \frac{p_3}{x_3}\right) = 0.$$

Das vollständige Integral ist:

$$z = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4,$$

woraus sich sofort das allgemeine Integral:

$$\left\{\begin{array}{l} z = a_1x_1^2 + \varphi_1(a_1)x_2^2 + \varphi_2(a_1)x_3^2 + \varphi_3(a_1) \\ 0 = x_1^2 + \frac{d\varphi_1(a_1)}{da_1}x_2^2 + \frac{d\varphi_2(a_1)}{da_1}x_3^2 + \frac{d\varphi_3(a_1)}{da_1} \end{array}\right\}$$

ergibt.

Vivanti, der sich ebenfalls mit unserer Differentialgleichung befaßt hat, war offenbar die Arbeit von Tanner nicht bekannt. In § 1 seiner Abhandlung: „Sulle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili indipendenti“ [11]) leitet er wie Tanner die Gleichung I aus dem Zwischenintegral $\chi(u_1u_2u_3) = 0$ ab. In § 2 reduziert er mittelst der Monge-Darbouxschen Methode die

10) S. S. 48. 11) Mathem. Annalen Bd. 48. 1897. p. 474—513.

Integration der Gleichung I auf diejenige des Systems nicht linearer totaler Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A \equiv\ & A_{11}\,dp_1\,dx_2\,dx_3 + A_{22}\,dp_2\,dx_3\,dx_1 + A_{33}\,dp_3\,dx_1\,dx_2 \\ & + B_{11}\,dx_1\,dp_2\,dp_3 + B_{22}\,dx_2\,dp_3\,dp_1 + B_{33}\,dx_3\,dp_1\,dp_2 \\ & + C\,dp_1\,dp_2\,dp_3 + D\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} L_1 \equiv\ & A_{22}\,dx_3^2 + A_{33}\,dx_2^2 - 2A_{23}\,dx_2\,dx_3 + B_{11}(-dp_1\,dx_1 + dp_2\,dx_2 + dp_3\,dx_3) \\ & - 2A_{12}\,dp_1\,dx_2 - 2A_{13}\,dp_1\,dx_3 - C\,dp_1^2 = 0, \end{aligned}$$

$L_2 \equiv 0,$

$L_3 \equiv 0,$

wobei L_2 und L_3 durch zyklische Vertauschung aus L_1 hervorgehen.

In § 3 stellt Vivanti die Bedingungen dafür auf, daß sich das nicht lineare System (5) auf ein lineares reduziert. Setzt man:

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

so lauten die betr. Bedingungsgleichungen

$$\alpha_{ik} - B_{ki}D = 0 \text{ und } \alpha = CD^2, \tag{6}$$

wo α_{ik} die zu A_{ik} gehörige Unterdeterminante von α ist; man überzeugt sich leicht, daß dies dieselben Bedingungsgleichungen sind, die wir schon bei Tanner kennen gelernt haben. Das lineare System lautet:

$$\left.\begin{aligned} & B_{11}dx_1 + B_{12}dx_2 + B_{13}dx_3 + C\,dp_1 = 0 \\ & B_{21}dx_1 + B_{22}dx_2 + B_{23}dx_3 + C\,dp_2 = 0 \\ & B_{31}dx_1 + B_{32}dx_2 + B_{33}dx_3 + C\,dp_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und wird in § 4 durch ein äquivalentes System von linearen partiellen Differentialgleichungen ersetzt; soll nämlich $u = a$ ein Integral des Systems (7) sein, so muß sein:

$$du = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial u}{\partial z} \sum_{i=1}^{3} p_i\,dx_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial p_i}\,dp_i = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte für dp_i aus dem System (7) ein und setzt man die Koeffizienten von dx_i gleich Null, so erhält man das Tannersche System (S_2).

Der eleganten Abteilung gegenüber, die Tanner von dem System (S_2) gibt, erscheinen die Rechnungen Vivantis unklar und verwickelt. Hiebei muß man noch bedenken, daß dem nicht linearen System (5) an und für sich gar keine Bedeutung zukommt, da seine

Integrale — wie der Beweis zeigt[12]) — nur dann die vorgelegte Monge-Ampèresche Differentialgleichung befriedigen, wenn man ein Zwischenintegral hat; in diesem Fall müssen[13]) aber stets die Bedingungsgleichungen (6) befriedigt sein und das System (5) reduziert sich auf das lineare System (7). Vivanti hat hier übersehen, daß die Bedingungsgleichungen (6) die notwendige Voraussetzung für eine Theorie der Monge-Ampèreschen Gleichung sind. Es ist ihm auch entgangen, daß neben dem System (S_2) noch ein zweites System (S_1) existiert, welches ebenfalls zur Lieferung von 1. Integralen dient.

Durch Auflösung der Gleichung von (S_2) nach $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \frac{\partial f}{\partial p_3}$ konstruiert er allerdings mit Hilfe der Gleichung (6) ein neues System[14]):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{A_{11}}{D}\frac{df}{dx_1} - \frac{A_{12}}{D}\frac{df}{dx_2} - \frac{A_{13}}{D}\frac{df}{dx_3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{A_{31}}{D}\frac{df}{dx_1} - \frac{A_{22}}{D}\frac{df}{dx_2} - \frac{A_{23}}{D}\frac{df}{dx_3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial p_3} - \frac{A_{21}}{D}\frac{df}{dx_1} - \frac{A_{32}}{D}\frac{df}{dx_2} - \frac{A_{33}}{D}\frac{df}{dx_3} = 0 \end{array}\right\} \qquad (S_4)$$

welches aber dem System (S_2) äquivalent ist.

Außerdem stellt Vivanti den falschen Satz auf: 2 Integrale des Systems (S_2) oder des Systems (S_4) liegen in Involution; von dieser falschen Voraussetzung ausgehend, beweist er ferner den Satz: Besitzt das System (S_2) 3 Integrale $u_1 = a_1, u_2 = a_2, u_3 = a_3$, so hat es auch stets noch ein 4. Integral $u_4 = a_4$, welches mit jedem der übrigen Integrale in Involution liegt; das System (S_2) ist in diesem Fall ein „vollständiges"; ist (S_2) kein vollständiges System, so kann es höchstens 2 Integrale haben.

Wir wissen[15]), daß dieser Satz nur richtig ist, wenn

$$A_{ik} = A_{ki} \text{ und } B_{ik} = B_{ki} \text{ ist.}$$

Hat die gegebene Differentialgleichung 4 erste Integrale $u_1 = a_1, u_2 = a_2, u_3 = a_3, u_4 = a_4$, die miteinander in Involution liegen, so gelangt Vivanti auf dieselbe Weise wie Tanner zum allgemeinen Integral:

$$\left\{\begin{array}{l} z = f[x_1 x_2 x_3 a_1 \varphi_1(a_1) \varphi_2(a_1) \varphi_3(a_1)] \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_1(a_1)} \cdot \frac{\partial \varphi_1(a_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2(a_1)} \cdot \frac{\partial \varphi_2(a_1)}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_3(a_1)} \cdot \frac{\partial \varphi_3(a_1)}{\partial a_1} \end{array}\right\}$$

wo: $a_2 = \varphi_1(a_1)$, $a_3 = \varphi_2(a_1)$ und $a_4 = \varphi_3(a_1)$ gesetzt worden ist.

---

12) Math. Ann. 48. p. 480 ff.

13) S. Kap. II § 3 der vorliegenden Arbeit.

14) Math. Ann. p. 488. 15) S. Kap. II § 5 der vorliegenden Arbeit.

Aus diesem allgemeinen Integral leitet er umgekehrt wieder die zugehörige Differentialgleichung ab, welche folgende spezielle Form besitzt:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & p_{12} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & p_{13} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ p_{21} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & p_{22} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & p_{23} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ p_{31} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & p_{32} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & p_{33} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 0$$

und für welche die Bedingungsgleichungen (6) erfüllt sind.

Wichtig ist, daß Vivanti unsere Differentialgleichung mit Berührungstransformationen in Beziehung bringt. Schon in seiner Arbeit: „Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine“ [16]) zeigt er, daß eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln durch eine beliebige Berührungstransformation in eine ebensolche übergeführt wird; in der oben besprochenen Abhandlung wendet er auf die Differentialgleichung I die Legendre sche Transformation:

$$z = \sum_{i=1}^{3} p_i' x_i' - z', \quad x_i = p_i'$$

und die Ampère sche Transformation:

$x_1 = x_1'$; $x_2 = x_2'$; $x_3 = p_3'$; $z = z' - p_3' x_3'$; $p_1 = p_1'$; $p_2 = p_2'$; $p_3 = -x_3'$

an. Er zeigt, daß durch diese Transformationen eine Gleichung von der Form I in eine ebensolche Gleichung übergeht, für die ebenfalls die Bedingungsgleichungen (6) erfüllt sind, und daß das Integrationssystem (S_2) in das entsprechende der transformierten Gleichung übergeht. Vivanti gelingt es durch die Anwendung dieser Berührungstransformationen, aus einer vorgelegten speziellen Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die z. B. $C = 0$ oder $D = 0$ ist, eine andere herzustellen, für die $C \neq 0$ oder $D \neq 0$ ist, was notwendig ist, wenn man die Integrationssysteme (S_2) oder (S_4) benützen will.

In einer 3. unsern Gegenstand berührenden Arbeit: „Sull estensione del metodo d'integrazione di Monge e Ampère“ [17]) beweist Vivanti, daß die spezielle Monge-Ampèresche Gleichung:

---

16) Reale istituto lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. XXIX. Fasc. XIII. 1896. p. 777—792.

17) Reale istituto lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. XXXII. 1899. Fasc. VI. p. 506—517.

$$A_{11}p_{11}+A_{22}p_{22}+A_{33}p_{33}+2A_{12}p_{12}+2A_{23}p_{23}+2A_{31}p_{31}+\alpha_{11}\Delta_{11}$$
$$+\alpha_{22}\Delta_{22}+\alpha_{33}\Delta_{33}+2\alpha_{12}\Delta_{12}+2\alpha_{23}\Delta_{23}+2\alpha_{31}\Delta_{31}+\alpha\Delta+D=0,$$

wobei: $A_{ik}=A_{ki}$ ist und α_{ik} die schon oben erwähnte Bedeutung hat, durch eine Berührungstransformation in eine Gleichung von derselben Beschaffenheit übergeht.

Im selben Jahr, in dem die Arbeit Vivantis in den Math. Annalen erschien, veröffentlichte Forsyth eine Abhandlung über: „Partial differential equations of the second order, involving three independent variables and possessing an intermediary integral“[18]). Forsyth leitet zunächst wie Tanner und Vivanti die Monge-Ampèresche Gleichung I aus dem Zwischenintegral $\chi(u_1u_2u_3)=0$ ab, wobei er die Bemerkung macht, daß, wenn die Gleichung I ein Zwischenintegral besitzen soll, zwischen den 14 Koeffizienten der Gleichung I und den Ableitungen dieser Koeffizienten gewisse Bedingungsgleichungen bestehen müssen. Um diese Bedingungsgleichungen aufzustellen, geht Forsyth aus von dem 1. Integral $u(x_1x_2x_3zp_1p_2p_3)=a$, aus welchem er durch Differentiation nach x_1, x_2 und x_3 die 3 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dx_1}+\frac{\partial u}{\partial p_1}p_{11}+\frac{\partial u}{\partial p_2}p_{21}+\frac{\partial u}{\partial p_3}p_{31}=0\\
&\frac{du}{dx_2}+\frac{\partial u}{\partial p_1}p_{12}+\frac{\partial u}{\partial p_2}p_{22}+\frac{\partial u}{\partial p_3}p_{32}=0\\
&\frac{du}{dx_3}+\frac{\partial u}{\partial p_1}p_{13}+\frac{\partial u}{\partial p_2}p_{23}+\frac{\partial u}{\partial p_3}p_{33}=0
\end{aligned}\right\}\quad\text{ableitet.}\tag{8}$$

Setzt man nun z. B. die Werte von p_{11}, p_{22}, p_{33} aus diesen 3 Gleichungen in die vorgelegte Gleichung I ein, so muß diese identisch befriedigt sein, d. h. es müssen die Koeffizienten von p_{23}, p_{31}, p_{12}, $p_{23}\cdot p_{31}$, $p_{31}\cdot p_{12}$, $p_{12}\cdot p_{23}$ und das Absolutglied verschwinden. Da die Koeffizienten von $p_{23}\cdot p_{31}$, $p_{31}\cdot p_{12}$ und $p_{12}\cdot p_{23}$ einander gleich sind, so erhält man auf diese Weise 5 Differentialgleichungen[19]) für u, die jedoch sehr komplizierter Natur sind.

Es gelingt nun Forsyth durch einen Kunstgriff, diese Gleichungen wesentlich zu vereinfachen. Er führt nämlich mittelst der 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
C\frac{du}{dx_1}&=B_{11}\frac{\partial u}{\partial p_1}+\gamma'\frac{\partial u}{\partial p_2}+\beta\frac{\partial u}{\partial p_3}\\
C\frac{du}{dx_2}&=\gamma\frac{\partial u}{\partial p_1}+B_{22}\frac{\partial u}{\partial p_2}+\alpha'\frac{\partial u}{\partial p_3}\\
C\frac{du}{dx_3}&=\beta'\frac{\partial u}{\partial p_1}+\alpha\frac{\partial u}{\partial p_2}+B_{33}\frac{\partial u}{\partial p_3}
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

18) Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XVI. Part. III. p. 191—218. 1897. 19) Trans. p. 195.

die 6 neuen Unbekannten α, α'; β, β'; γ, γ' ein; setzt man die Werte von $\frac{du}{dx_1}$, $\frac{du}{dx_2}$ und $\frac{du}{dx_3}$ aus diesen 3 Gleichungen in die oben genannten 5 Gleichungen ein, so sind dieselben identisch erfüllt, wenn die Größen α, α'; β, β' und γ, γ' folgenden Bedingungsgleichungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\alpha' = B_{22}B_{33} - CA_{11};\ \alpha+\alpha' = 2B_{23}; \\ \beta\beta' = B_{33}B_{11} - CA_{22};\ \beta+\beta' = 2B_{31}; \\ \gamma\gamma' = B_{11}B_{22} - CA_{33};\ \gamma+\gamma' = 2B_{12}; \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta\gamma+\beta'\gamma' = 2A_{23}\cdot C + 2B_{23}\cdot B_{11}; \\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma' = 2A_{31}\cdot C + 2B_{31}\cdot B_{22}; \\ \alpha\beta+\alpha'\beta' = 2A_{12}\cdot C + 2B_{12}\cdot B_{33}; \\ \alpha'\beta'\gamma'+\alpha\beta\gamma = 2B_{11}\cdot B_{22}\cdot B_{33} - B_{11}\cdot A_{11}\cdot C - B_{22}\cdot A_{22}\cdot C \\ \qquad\qquad - B_{33}\cdot A_{33}\cdot C + C^2\cdot D. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Wie man ohne weiteres sieht, sind die neu eingeführten Größen α, α'; β, β' und γ, γ' nichts anderes als

$$B_{23},\ B_{32};\ B_{31},\ B_{13} \text{ und } B_{12},\ B_{21}$$

und das System (9) ist identisch mit dem System (S_1).

Forsyth führt also wie Tanner und Vivanti die Integration der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung auf diejenige des Systems (S_1) zurück, vorausgesetzt, daß zwischen den Koeffizienten der Gleichung III die Bedingungsgleichungen (10) und (11) bestehen, welche den Gleichungen (6) äquivalent sind. Die Rechnungen Forsyths sind zwar klarer und übersichtlicher, als diejenigen von Vivanti, es ist aber zu bedenken, daß bei der künstlichen Einführung der neuen Unbekannten α, α' usw. das Integrationssystem (S_1) offenbar als solches schon bekannt sein muß.

Um zu zeigen, daß das Integral $u = a$ die vorgelegte Differentialgleichung befriedigt, setzt er die Werte für $\frac{du}{dx_1}$, $\frac{du}{dx_2}$, $\frac{du}{dx_3}$ aus den Gleichungen (8) in die 3 Gleichungen des Systems (S_1) ein; durch Elimination von $\frac{\partial u}{\partial p_1}$, $\frac{\partial u}{\partial p_2}$, $\frac{\partial u}{\partial p_3}$ erhält er hieraus die Gleichung

$$\begin{vmatrix} Cp_{11}+B_{11} & Cp_{21}+B_{21} & Cp_{31}+B_{31} \\ Cp_{12}+B_{12} & Cp_{22}+B_{22} & Cp_{32}+B_{32} \\ Cp_{13}+B_{13} & Cp_{23}+B_{23} & Cp_{33}+B_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

welche mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (6) in die Gleichung III übergeht. Forsyth geht nun auf die Integrabilitätsbedingungen des Systems (S_1) ein, indem er von dem Bourschen Gedanken ausgeht, daß man den 3 Gleichungen

$$X_1(f) \equiv 0, \quad X_2(f) \equiv 0, \quad X_3(f) \equiv 0$$

die Gleichungen
$$X_4(f) \equiv X_1[X_2(f)] - X_2[X_1(f)] = 0,$$
$$X_5(f) \equiv X_2[X_3(f)] - X_3[X_2(f)] = 0,$$
$$X_6(f) \equiv X_3[X_1(f)] - X_1[X_3(f)] = 0,$$
$$X_7(f) \equiv X_1[X_4(f)] - X_4[X_1(f)] = 0 \quad \text{usw.}$$

so lange hinzufügen muß, bis man ein vollständiges System hat. Für den Fall, daß das System (S_1) ein vollständiges ist, beweist er den Satz:

Soll eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung I 4 erste Integrale $u_1 = a_1$; $u_2 = a_2$; $u_3 = a_3$ und $u_4 = a_4$ besitzen, die miteinander in Involution liegen, d. h., soll das Integrationssystem (S_1) ein vollständiges sein, so müssen folgende Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten der gegebenen Gleichung bestehen:

$$B_{23}^2 = B_{22}B_{33} - CA_{11}; \quad B_{31}B_{12} = A_{23}C + B_{23}B_{11};$$
$$B_{31}^2 = B_{33}B_{11} - CA_{22}; \quad B_{12}B_{23} = A_{31}C + B_{31}B_{22};$$
$$B_{12}^2 = B_{11}B_{22} - CA_{33}; \quad B_{23}B_{31} = A_{12}C + B_{12}B_{33};$$

$$C^2D = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} \end{vmatrix}$$

$$X_2(B_{11}) = X_1(B_{12}); \; X_2(B_{12}) = X_1(B_{22}); \; X_2(B_{31}) = X_1(B_{32});$$
$$X_3(B_{12}) = X_2(B_{13}); \; X_3(B_{22}) = X_2(B_{23}); \; X_3(B_{32}) = X_2(B_{33});$$
$$X_1(B_{13}) = X_2(B_{11}); \; X_1(B_{23}) = X_3(B_{21}); \; X_1(B_{33}) = X_3(B_{31})$$

Die vorgelegte Differentialgleichung läßt sich dann in der Determinantenform:
$$\begin{vmatrix} Cp_{11} + B_{11} & Cp_{12} + B_{12} & Cp_{31} + B_{31} \\ Cp_{12} + B_{12} & Cp_{22} + B_{22} & Cp_{23} + B_{23} \\ Cp_{31} + B_{31} & Cp_{23} + B_{23} & Cp_{33} + B_{33} \end{vmatrix} = 0$$
schreiben.

Als allgemeinstes Integral dieser speziellen Gleichung betrachtet Forsyth das System:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = f[x_1, \; x_2, \; x_3, \; a_1, \; a_2, \; \varphi_1(a_1 a_2), \; \varphi_2(a_1 a_2)] \\ 0 = \dfrac{df}{da_1} \\ 0 = \dfrac{df}{da_2} \end{array} \right\}$$

wogegen Tanner und Vivanti in das allgemeine Integral nur eine willkürliche Konstante a_1 aufnehmen.

Ist das System (S_1) kein vollständiges, so ist nicht wie im vorigen Fall $B_{ik} = B_{ki}$ und man erhält durch Vertauschen von B_{ik} mit B_{ki} ein zweites System (S_2). Forsyth beweist noch, daß

ein Integral $u = a$ des Systems (S_1) mit einem Integral $v = b$ des Systems (S_2) in Involution liegt; er stellt jedoch keine Integrabilitätsbedingungen dafür auf, daß das System (S_1) [bzw. (S_2)] 1, 2 oder 3 Integrale besitzt.

Eine neue Ableitung der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung gibt Goursat in seiner Arbeit: „Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère“[20]). Er geht aus von der Theorie der Charakteristiken und von den die „charakteristischen Streifen“ bestimmenden Differentialgleichungen, die er in der Form:

$$\left.\begin{array}{l} dp_1 + a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + a_{13}dx_3 = 0 \\ dp_2 + a_{21}dx_1 + a_{22}dx_2 + a_{23}dx_3 = 0 \\ dp_3 + a_{31}dx_1 + a_{32}dx_2 + a_{33}dx_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

annimmt. Aus diesen Gleichungen eliminiert er, nachdem dp_i durch $p_{1i}dx_1 + p_{2i}dx_2 + p_{3i}dx_3$ ersetzt worden ist, dx_1, dx_2, dx_3, wodurch er die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} p_{11}+a_{11} & p_{12}+a_{12} & p_{13}+a_{13} \\ p_{21}+a_{21} & p_{22}+a_{22} & p_{23}+a_{23} \\ p_{31}+a_{31} & p_{32}+a_{32} & p_{33}+a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{erhält.} \qquad (14)$$

Die Gleichung (14) ist nun die zu dem Charakteristikensystem (13) gehörige Differentialgleichung und umgekehrt werden die Charakteristiken der Gleichung (14) definiert durch das System (13), auf dessen Integration also diejenige der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung (14) zurückgeführt ist. Das System (13) ist offenbar identisch mit dem System (7), denn setzt man $C = 1$, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, so ist $a_{ik} = B_{ik}$ und die Determinante (14) ist identisch mit der schon von Forsyth aufgestellten Determinante (12). Auf dieselbe Weise wie Vivanti leitet nun Goursat aus dem System (13) das System (S_2) ab; da sich die Determinante (12) nicht ändert, wenn man B_{ik} mit B_{ki} vertauscht, so erhält man neben dem System (S_2) noch ein 2. System (S_1) durch Vertauschen von B_{ik} mit B_{ki}. Für diese beiden Systeme beweist Goursat die schon bekannten Sätze: Jedes Integral des Systems (S_1) liegt mit jedem Integral des Systems (S_2) in Involution; jedes der beiden Systeme (S_1) und (S_2) kann höchstens 3 Integrale besitzen, die zusammen ein Zwischenintegral bilden; besitzt eines der Systeme z. B. (S_1) 4 Integrale, so ist $B_{ik} = B_{ki}$ und (S_1) fällt mit (S_2) zusammen.

20) Bulletin de la société mathématique de France. T. 27. 1899. p. 1 – 34.

Nachdem Goursat so die Hauptgedanken der Integrationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung entwickelt hat, stellt er sich die Aufgabe, mittelst der Lieschen Theorie der Transformationsgruppen alle voneinander verschiedenen kanonischen Formen für diejenigen Monge-Ampèreschen Gleichungen aufzustellen, welche 2 Zwischenintegrale besitzen. Schon vor Erledigung dieses Problems stellt er den Satz auf:

Besitzt eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung 4 Integrale $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$, $u_3 = a_3$, $u_4 = a_4$, die miteinander in Involution liegen, so wird dieselbe durch die Berührungstransformation:

$$u_1 = p_1'; \quad u_2 = p_2'; \quad u_3 = p_3'; \quad u_4 = p_1' x_1' + p_2' x_2' + p_3' x_3' - z'$$

in die Gleichung $\Delta' = 0$

und durch die Berührungstransformation:

$$u_1 = p_1'; \quad u_2 = x_2'; \quad u_3 = x_3'; \quad u_4 = z' - p_1' x_1'$$

in die noch einfachere Gleichung

$$p_{11}' = 0$$ transformiert.

Besitzt die vorgelegte Differentialgleichung 2 Zwischenintegrale $\chi_1(u_1 u_2 u_3) = 0$ und $\chi_2(v_1 v_2 v_3) = 0$, so bilden die Integrale: u_1, u_2, u_3 des Systems (S_1) eine Gruppe U, deren Glieder nicht in Involution liegen, da $[u_i u_k] \neq 0$ ist. Die Integrale v_1, v_2, v_3 des Systems (S_2) bilden die zu U gehörige Polargruppe V.

Für die Gruppe U gibt es nun, wie Goursat nach dem Vorgange von Lie zeigt, 2 voneinander verschiedene kanonische Formen und zwar:

$$U_I \mid x_1 \; p_1 \; x_2 \mid$$

und

$$U_{II} \mid x_1 \; p_1 \; z \mid .$$

Zu jeder dieser kanonischen Formen gibt es eine bestimmte Monge-Ampèresche Differentialgleichung; die eine hat das Zwischenintegral:

$\chi(x_1 p_1 z) = 0$ und lautet daher: $p_{12} p_3 - p_{13} p_2 = 0$,

während die andere das Zwischenintegral:

$\chi(x_1 p_1 x_2) = 0$ besitzt und von der einfachen Form: $p_{13} = 0$ ist.

II. Kapitel.

Integrationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

§ 1. Herleitung der Gleichung I aus dem Zwischenintegral.

Wir gehen aus von dem Satz:

Soll eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit 3 unabhängigen Variabeln:

$$f(x_1 x_2 x_3 z p_1 p_2 p_3 p_{11} p_{22} p_{33} p_{12} p_{13} p_{23}) = 0$$

ein Zwischenintegral von der Form:

$$\chi(u_1 u_2 u_3) = 0 \tag{1}$$

haben, wo u_1, u_2, u_3 bestimmte Funktionen von $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$ sind und wo χ eine willkürliche Funktion ist, so muß sie von der Form I sein.

Beweis: Wir differentiieren die Gleichung $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ nach den unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3; setzt man dabei:

$$\frac{du_k}{dx_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial z} p_i \quad \text{und} \quad \varrho_{ki} = \frac{du_k}{dx_i} + \frac{\partial u_k}{\partial p_1} p_{1i} + \frac{\partial u_k}{\partial p_2} p_{2i} + \frac{\partial u_k}{\partial p_3} p_{3i}, \mid i, k = 1, 2, 3.$$

so erhält man:

$$\frac{d\chi}{du_1}\varrho_{1i} + \frac{d\chi}{du_2}\varrho_{2i} + \frac{d\chi}{du_3}\varrho_{3i} = 0 \mid i = 1, 2, 3.$$

Aus den letzten 3 Gleichungen erhält man durch Elimination von $\frac{d\chi}{du_1}, \frac{d\chi}{du_2}, \frac{d\chi}{du_3}$:

$$\begin{vmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \varrho_{13} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & \varrho_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Rechnet man die Determinante (2) aus, so erhält man mit den Abkürzungen des 1. Kapitels die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_1 \end{vmatrix} p_{11} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_2 \end{vmatrix} p_{22} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_3 \end{vmatrix} p_{33} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_1 \end{vmatrix} \right\} p_{12}$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_2 \end{vmatrix} \right\} p_{23} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_3 \end{vmatrix} \right\} p_{31} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_1 \end{vmatrix} \Delta_{11}$$
$$+ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_2 \end{vmatrix} \Delta_{22} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_3 \end{vmatrix} \Delta_{33} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_1 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{11} \qquad \text{II.}$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_2 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{23} + \left\{ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_3 \end{vmatrix} \right\} \Delta_{31}$$
$$+ \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} \Delta + \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda A_{1i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_2 x_3 p_i \end{vmatrix}; & \lambda A_{2i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_3 x_1 p_i \end{vmatrix}; & \lambda A_{3i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 p_i \end{vmatrix}; \\ \lambda B_{1i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_2 p_3 x_i \end{vmatrix}; & \lambda B_{2i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_3 p_1 x_i \end{vmatrix}; & \lambda B_{3i} = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 x_i \end{vmatrix}; \\ \lambda D = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{vmatrix} \text{ und } \lambda C = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix}, & & \end{array}\right\} \qquad (3)$$

so geht die Gleichung II über in

$$A_{11}p_{11} + A_{22}p_{22} + A_{33}p_{33} + (A_{12} + A_{21})p_{12} + (A_{13} + A_{31})p_{13}$$
$$+ (A_{23} + A_{32})p_{23} + B_{11}\Delta_{11} + B_{22}\Delta_{22} + B_{33}\Delta_{33} + (B_{12} + B_{21})\Delta_{12} \qquad \text{III.}$$
$$+ (B_{13} + B_{31})\Delta_{13} + (B_{23} + B_{32})\Delta_{23} + C\Delta + D = 0.$$

Das ist eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung von der Form I, w. z. b. w.

Zusatz: Die Gleichung $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ führt auf eine Differentialgleichung vom 2. Grad, wenn $\lambda C = \begin{vmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = 0$ ist, d. h., wenn u_1, u_2, u_3 als Funktionen von p_1, p_2, p_3 nicht unabhängig voneinander sind.

§ 2. Herleitung des Integrationssystems.

Um zu dem allgemeinen Integral der gegebenen Differentialgleichung zu gelangen, suchen wir zunächst Funktionen u_1, u_2, u_3, die den Gleichungen (3) genügen. $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ und $u_3 = a_3$ sind alsdann die „ersten Integrale“ der gegebenen Differentialgleichung, wobei a_1, a_2, a_3 beliebige Konstante sind. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du_1}{dx_1}dx_1 + \frac{du_1}{dx_2}dx_2 + \frac{du_1}{dx_3}dx_3 + \frac{\partial u_1}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial u_1}{\partial p_2}dp_2 + \frac{\partial u_1}{\partial p_3}dp_3 = 0 \\ \frac{du_2}{dx_1}dx_1 + \frac{du_2}{dx_2}dx_2 + \frac{du_2}{dx_3}dx_3 + \frac{\partial u_2}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial u_2}{\partial p_2}dp_2 + \frac{\partial u_2}{\partial p_3}dp_3 = 0 \\ \frac{du_3}{dx_1}dx_1 + \frac{du_3}{dx_2}dx_2 + \frac{du_3}{dx_3}dx_3 + \frac{\partial u_3}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial u_3}{\partial p_2}dp_2 + \frac{\partial u_3}{\partial p_3}dp_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Diese 3 Gleichungen lassen sich durch 3 andere äquivalente Gleichungen ersetzen, da man je 2 der Größen $dx_1 \ldots\ldots dp_3$ eliminieren kann.

Eliminieren wir z. B. dp_2, dp_3, so zeigt sich, daß die Koeffizienten der neuen Gleichung nur von den Koeffizienten der gegebenen Gleichung I abhängen. Wir erhalten nämlich die Gleichung:

$$B_{11}dx_1 + B_{12}dx_2 + B_{13}dx_3 + Cdp_1 = 0.$$

Eliminiert man in entsprechender Weise die übrigen Differentiale, so erhält man folgendes System:

$$\left\{\begin{array}{rl}
(1) & B_{11}dx_1 + B_{12}dx_2 + B_{13}dx_3 + C\,dp_1 = 0 \\
(2) & B_{21}dx_1 + B_{22}dx_2 + B_{23}dx_3 + Cdp_2 = 0 \\
(3) & B_{31}dx_1 + B_{32}dx_2 + B_{33}dx_3 + Cdp_3 = 0 \\
(4) & A_{11}dp_1 + A_{12}dp_2 + A_{13}dp_3 + Ddx_1 = 0 \\
(5) & A_{21}dp_1 + A_{22}dp_2 + A_{23}dp_3 + Ddx_2 = 0 \\
(6) & A_{31}dp_1 + A_{32}dp_2 + A_{33}dp_3 + Ddx_3 = 0 \\
(7) & -A_{31}dx_2 + A_{21}dx_3 + B_{31}dp_2 - B_{21}dp_3 = 0 \\
(8) & -A_{32}dx_2 + A_{22}dx_3 + B_{11}dp_3 - B_{31}dp_1 = 0 \\
(9) & -A_{33}dx_2 + A_{23}dx_3 + B_{21}dp_1 - B_{11}dp_2 = 0 \\
(10) & -A_{11}dx_3 + A_{31}dx_1 + B_{32}dp_2 - B_{22}dp_3 = 0 \\
(11) & -A_{12}dx_3 + A_{32}dx_2 + B_{12}dp_3 - B_{32}dp_1 = 0 \\
(12) & -A_{13}dx_3 + A_{33}dx_1 + B_{22}dp_1 - B_{12}dp_2 = 0 \\
(13) & -A_{21}dx_1 + A_{11}dx_2 + B_{33}dp_3 - B_{23}dp_3 = 0 \\
(14) & -A_{22}dx_1 + A_{12}dx_2 + B_{13}dp_3 - B_{33}dp_1 = 0 \\
(15) & -A_{23}dx_1 + A_{13}dx_2 + B_{23}dp_1 - B_{13}dp_2 = 0
\end{array}\right\} \quad \text{IV.}$$

Hiezu kommen noch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{c}
dz - p_1dx_1 - p_2dx_2 - p_3dx_3 = 0 \\
dp_i - p_{1i}dx_1 - p_{2i}dx_2 - p_{3i}dx_3 = 0 \;|\; i = 1, 2, 3
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Wir haben nunmehr den Satz:

Existiert ein Zwischenintegral der Differentialgleichung III von der Form: $\chi(u_1u_2u_3) = 0$, so erhält man die Funktionen u_1, u_2, u_3, indem man das System IV integriert und die Integrale nach den Konstanten auflöst, oder es ergeben sich die Funktionen u_1, u_2, u_3 aus 3 integralen Kombinationen der linken Seiten dieses Systems.

§ 3. Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten der Gleichung III.

Da sich die Koeffizienten der Gleichung II als die Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx_1} & \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_1}{dx_3} & \frac{\partial u_1}{\partial p_1} & \frac{\partial u_1}{\partial p_2} & \frac{\partial u_1}{\partial p_3} \\ \frac{du_2}{dx_1} & \frac{du_2}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_3} & \frac{\partial u_2}{\partial p_1} & \frac{\partial u_2}{\partial p_2} & \frac{\partial u_2}{\partial p_3} \\ \frac{du_3}{dx_1} & \frac{du_3}{dx_2} & \frac{du_3}{dx_3} & \frac{\partial u_3}{\partial p_1} & \frac{\partial u_3}{\partial p_2} & \frac{\partial u_3}{\partial p_3} \end{vmatrix}$$

darstellen, so werden zwischen diesen Koeffizienten und deren Ableitungen gewisse Bedingungsgleichungen bestehen müssen. Die Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten selbst ergeben sich leicht aus dem System IV. Die Gleichungen dieses Systems können nämlich nicht unabhängig voneinander sein, da sie an die Stelle der 3 Gleichungen (4) getreten sind. Da also schon 4 Gleichungen voneinander abhängig sein müssen, muß es 3 Faktoren m_1, m_2, m_3 geben, so daß z. B.:

$$\begin{aligned} &m_1(B_{11}\,\mathrm{d}x_1 + B_{12}\,\mathrm{d}x_2 + B_{13}\,\mathrm{d}x_3 + C\,\mathrm{d}p_1) \\ &+ m_2(B_{21}\,\mathrm{d}x_1 + B_{22}\,\mathrm{d}x_2 + B_{23}\,\mathrm{d}x_3 + C\,\mathrm{d}p_2) \\ &+ m_3(B_{31}\,\mathrm{d}x_1 + B_{32}\,\mathrm{d}x_2 + B_{33}\,\mathrm{d}x_3 + C\,\mathrm{d}p_3) \\ &+ (A_{11}\,\mathrm{d}p_1 + A_{12}\,\mathrm{d}p_2 + A_{13} + D\,\mathrm{d}x_1) = 0 \end{aligned}$$

ist. Es muß also sein:

$$\left\{\begin{aligned} m_1 B_{11} + m_2 B_{21} + m_3 B_{31} + D &= 0 \\ m_1 B_{12} + m_2 B_{22} + m_3 B_{32} &= 0 \\ m_1 B_{13} + m_2 B_{23} + m_3 B_{33} &= 0 \\ m_1 C + A_{11} &= 0 \\ m_2 C + A_{12} &= 0 \\ m_3 C + A_{13} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Hieraus erhält man durch Elimination von m_1, m_2 und m_3 die 3 Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31} - CD &= 0 \\ A_{11} B_{12} + A_{12} B_{22} + A_{13} B_{32} &= 0 \\ A_{11} B_{13} + A_{12} B_{23} + A_{13} B_{33} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Verfährt man auf dieselbe Weise mit sämtlichen Gleichungen des Systems IV, so erhält man eine Reihe solcher Bedingungsgleichungen, die aber nicht alle unabhängig voneinander sind.

Um die voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen zu erhalten, setzt man in die 3 ersten Gleichungen des Systems IV die

Werte von dp_1, dp_2 und dp_3 aus den Gleichungen (5) ein und eliminiert dx_1, dx_2, dx_3, wodurch man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} Cp_{11}+B_{11} & Cp_{21}+B_{21} & Cp_{31}+B_{31} \\ Cp_{12}+B_{12} & Cp_{22}+B_{22} & Cp_{32}+B_{32} \\ Cp_{13}+B_{13} & Cp_{23}+B_{23} & Cp_{33}+B_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

erhält. Multipliziert man die Determinante aus, so erhält man:

$C\beta_{11}p_{11}+C\beta_{22}p_{22}+C\beta_{33}p_{33}+C(\beta_{12}+\beta_{21})p_{12}+C(\beta_{23}+\beta_{32})p_{23}$
$+C(\beta_{31}+\beta_{13})p_{13}+C^2B_{11}\Delta_{11}+C^2B_{22}\Delta_{22}+C^2B_{33}\Delta_{33}+C^2(B_{12}+B_{21})\Delta_{12}$
$+C^2(B_{23}+B_{32})\Delta_{23}+C^2(B_{31}+B_{13})\Delta_{13}+C^3\Delta+\beta=0,$

wo β_{ik} die zu B_{ik} gehörige Unterdeterminante von:

$$\beta = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} \quad \text{ist.}$$

Soll also eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung III ein Integrationssystem IV besitzen, so muß sie sich auf die vorstehende Form bringen lassen, woraus sich die 10 voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$\beta_{ik}-A_{ki}C=0 \text{ und } \beta=C^2D \qquad (7)$$

ergeben; man entscheidet nämlich leicht, daß $\beta_{ik} \mp A_{ik}C$ ist, dadurch, daß man auf die schon oben angegebene Weise weitere Bedingungsgleichungen aufstellt.

Bezeichnet man die Determinante der β_{ik} mit $|\beta_{ik}|$ und ihre Unterdeterminanten mit $\bar{\beta}_{ik}$, so gibt die erste der Gleichungen (7):

$$|\bar{\beta}_{ik}|-\alpha_{ki}\cdot C^2=0 \qquad \text{und} \qquad |\beta_{ik}|-\alpha C^3=0.$$

Nun ist aber: $|\bar{\beta}_{ik}|=\beta\cdot B_{ik}$ und $|\beta_{ik}|=\beta^2$,

also ist: $\beta\cdot B_{ik}-\alpha_{ki}\cdot C^2=0$ und $\beta^2-\alpha C^3=0$,

oder wegen der 2. der obigen Gleichungen (7):

$$\alpha_{ik}-B_{ki}\cdot D=0 \qquad \text{und} \qquad \alpha=CD^2. \qquad (8)$$

Setzt man $C=1$, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, so läßt die Monge-Ampèresche Differentialgleichung folgende symmetrische Form zu:

$\beta_{11}p_{11}+\beta_{22}p_{22}+\beta_{33}p_{33}+(\beta_{12}+\beta_{21})p_{12}+(\beta_{23}+\beta_{32})p_{23}+(\beta_{31}+\beta_{13})p_{13}$
$+B_{11}\Delta_{11}+B_{22}\Delta_{22}+B_{33}\Delta_{33}+(B_{12}+B_{21})\Delta_{12}+(B_{32}+B_{23})\Delta_{23}$
$+(B_{31}+B_{13})\Delta_{13}+\Delta+\beta=0.$

Ersetzen wir in dieser Gleichung die β_{ik} und die B_{ik} durch die α_{ik} und A_{ik} mittelst der Gleichungen (7) und (8), so erhalten wir:

$DA_{11}p_{11}+DA_{22}p_{22}+DA_{33}p_{33}+D(A_{12}+A_{21})p_{12}+D(A_{23}+A_{32})p_{23}$
$+D(A_{31}+A_{13})p_{13}+\alpha_{11}\Delta_{11}+\alpha_{22}\Delta_{22}+\alpha_{33}\Delta_{33}+(\alpha_{12}+\alpha_{21})\Delta_{12}+(\alpha_{23}+\alpha_{32})\Delta_{23}$
$+(\alpha_{31}+\alpha_{13})\Delta_{13}+\Delta+\alpha=0.$

Die Bedingungsgleichungen (7) sind notwendig, aber nicht hinreichend dafür, daß die Gleichung III ein Zwischenintegral

$$\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$$

besitzt. Die noch fehlenden Bedingungsgleichungen enthalten außer den Koeffizienten noch deren Ableitungen und ergeben sich aus den Integrabilitätsbedingungen[21]) des Systems IV. Da das System IV auch in dem Falle, in dem die gegebene Monge-Ampèresche Differentialgleichung kein Zwischenintegral besitzt, zur Lieferung von 1. Integralen dienen kann, haben wir den Satz:

Für jede Monge-Ampèresche Differentialgleichung III müssen die Bedingungsgleichungen (7) erfüllt sein.

Eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung wird gewöhnlich in der Form I vorgelegt sein; es sind also zunächst nur die Summen:

$$A_{ik} + A_{ki} = 2\,\mathrm{A}_{ik} \quad \text{und} \quad B_{ik} + B_{ki} = 2\,\mathrm{B}_{ik}$$

gegeben; mit Hilfe der obigen Bedingungsgleichungen (7) lassen sich jedoch die Größen A_{ik}, A_{ki} und B_{ik}, B_{ki} selbst leicht finden. Es ist z. B.

$$A_{12} + A_{21} = 2\,\mathrm{A}_{12}$$

und

$$A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11} + B_{33}D = 0.$$

A_{12} und A_{21} sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$x^2 - 2x\,\mathrm{A}_{12} + A_{22}A_{11} - B_{33}D = 0.$$

Ebenso sind A_{23} und A_{32} die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - 2x\,\mathrm{A}_{23} + A_{33}A_{22} - B_{11}D = 0 \tag{9}$$

und A_{31} und A_{13} die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - 2x\,\mathrm{A}_{13} + A_{11}A_{33} - B_{22}D = 0.$$

Ganz entsprechend sind die B_{ik} die Wurzeln der Gleichungen:

$$\begin{aligned} y^2 - 2y\,\mathrm{B}_{12} + B_{22}B_{11} - A_{33}C &= 0; \\ y^2 - 2y\,\mathrm{B}_{23} + B_{33}B_{22} - A_{11}C &= 0; \\ y^2 - 2y\,\mathrm{B}_{31} + B_{11}B_{33} - A_{22}C &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir können also jederzeit die Gleichung I auf die Form III bringen, wobei jedoch zu beachten ist, daß wenn man für A_{12} eine bestimmte Wurzel der 1. Gleichung (9) wählt, alle übrigen A_{ik} und B_{ik} wegen der Bedingungsgleichungen (7) eindeutig bestimmt sind. Aus dem Umstand, daß sich die Größen A_{ik}, A_{ki} und B_{ik}, B_{ki} als Wurzeln von quadratischen Gleichungen bestimmen, ergibt sich, daß neben dem System IV noch ein 2. System V existiert, welches aus dem ersteren dadurch hervorgeht, daß man A_{ik} mit A_{ki} und

21) S. § 5 dieses Kapitels.

zugleich B_{ik} mit B_{ki} vertauscht. Auch dieses 2. System V kann zur Lieferung eines Zwischenintegrals $\chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0$ dienen; es ist jedoch zu beachten, daß — wie aus der obigen Ableitung der Systeme IV und V hervorgeht — zu einem Zwischenintegral nur e i n e s dieser Systeme gehört.

§ 4. Das System von partiellen Differentialgleichungen.

Existiert ein „erstes Integral" $u_1 = a_1$ des Systems IV, so hat man:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial u_1}{\partial z} dz + \frac{\partial u_1}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial u_1}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial u_1}{\partial p_3} dp_3 = 0.$$

Bedenkt man, daß: $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$ ist und ersetzt man dp_1, dp_2 und dp_3 durch die Werte, die man aus den 3 ersten Gleichungen des Systems IV erhält, so erhält man die Gleichung:

$$du_1 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0.$$

Man kann daher u_1 auffassen als gemeinsame Lösung des simultanen Systems von partiellen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{df}{dx_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{B_{11}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{B_{21}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{B_{31}}{C} = 0 \\ X_2(f) &= \frac{df}{dx_2} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{B_{12}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{B_{22}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{B_{32}}{C} = 0 \\ X_3(f) &= \frac{df}{dx_3} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{B_{13}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{B_{23}}{C} - \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{B_{33}}{C} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (S_1)$$

Diesem System genügen auch die Integrale $u_2 = a_2$ und $u_3 = a_3$, ebenso wie das Zwischenintegral:

$$\chi(u_1 u_2 u_3) = 0.$$

Durch Vertauschen von B_{ik} mit B_{ki} erhält man ein analoges System:

$$\left.\begin{aligned} Y_1(f) &= 0 \\ Y_2(f) &= 0 \\ Y_3(f) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (S_2)$$

welches die ersten Integrale $v_1 = b_1$; $v_2 = b_2$; $v_3 = b_3$ und das Zwischenintegral: $\chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0$ liefert.

Nimmt man statt der 3 ersten Gleichungen des Systems IV 3 beliebige andere Gleichungen desselben, so bekommt man ein anderes System von partiellen Differentialgleichungen, welches wegen der Bedingungsgleichungen (7) dem System S_1 äquivalent ist und also auch dieselben Integrale wie (S_1) besitzt.

So bekommt man z. B. mit Hilfe der Gleichungen (4), (5) und (6) ein System, das statt der B nur die A enthält:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} - \dfrac{A_{11}}{D}\dfrac{df}{dx_1} - \dfrac{A_{21}}{D}\dfrac{df}{dx_2} - \dfrac{A_{31}}{D}\dfrac{df}{dx_3} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \dfrac{A_{12}}{D}\dfrac{df}{dx_1} - \dfrac{A_{22}}{D}\dfrac{df}{dx_2} - \dfrac{A_{32}}{D}\dfrac{df}{dx_3} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_3} - \dfrac{A_{13}}{D}\dfrac{df}{dx_1} - \dfrac{A_{23}}{D}\dfrac{df}{dx_2} - \dfrac{A_{33}}{D}\dfrac{df}{dx_3} = 0 \end{array}\right\} \qquad (S_3)$$

Analog (S_4) durch Vertauschen von A_{ik} mit A_{ki}.

Auf entsprechende Weise erhält man die andern Systeme, welche von Nutzen sind, wenn die vorgelegte Gleichung ein Spezialfall der Gleichung I ist. Ist z. B. $C = 0$, so kann man das System (S_1) nicht zur Integration benützen, weil wir bei dessen Ableitung vorausgesetzt haben, daß $C \neq 0$ ist; in diesem Fall wird man der Integration das System (S_3) zugrunde legen müssen.

§ 5. Die Integrale des Systems (S_1).

Zur Herleitung des allgemeinen Integrals können wir entweder die Systeme IV und V oder die Systeme (S_1) und (S_2) benützen; wir wollen uns jedoch im folgenden auf die letzteren beschränken.

Wir haben bis jetzt gesehen, daß 3 erste Integrale $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ und $u_3 = a_3$ eines und desselben Systems ein Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ liefern; Integrale des einen Systems mit Integralen des andern Systems zusammengenommen, liefern jedoch keine Zwischenintegrale. Es gilt aber der Satz:

Ist $u = a$ ein Integral des Systems (S_1) und ist $v = b$ ein Integral des Systems (S_2), so liegen die Größen u und v in Involution, d. h. es ist $[uv] = 0$.

Beweis: Es ist wegen der Systeme (S_1) und (S_2):

$$\begin{array}{l|l} \dfrac{du}{dx_1} = \dfrac{\partial u}{\partial p_1}\dfrac{B_{11}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_2}\dfrac{B_{21}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_3}\dfrac{B_{31}}{C} & \dfrac{\partial v}{\partial p_1} \\ \dfrac{du}{dx_2} = \dfrac{\partial u}{\partial p_1}\dfrac{B_{12}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_2}\dfrac{B_{22}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_3}\dfrac{B_{32}}{C} & \dfrac{\partial v}{\partial p_2} \\ \dfrac{du}{dx_3} = \dfrac{\partial u}{\partial p_1}\dfrac{B_{13}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_2}\dfrac{B_{23}}{C} + \dfrac{\partial u}{\partial p_3}\dfrac{B_{33}}{C} & \dfrac{\partial v}{\partial p_3} \\ \dfrac{dv}{dx_1} = \dfrac{\partial v}{\partial p_1}\dfrac{B_{11}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_2}\dfrac{B_{12}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_3}\dfrac{B_{13}}{C} & \dfrac{\partial u}{\partial p_1} \\ \dfrac{dv}{dx_2} = \dfrac{\partial v}{\partial p_1}\dfrac{B_{21}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_2}\dfrac{B_{22}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_3}\dfrac{B_{23}}{C} & \dfrac{\partial u}{\partial p_2} \\ \dfrac{dv}{dx_3} = \dfrac{\partial v}{\partial p_1}\dfrac{B_{31}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_2}\dfrac{B_{32}}{C} + \dfrac{\partial v}{\partial p_3}\dfrac{B_{33}}{C} & \dfrac{\partial u}{\partial p_3} \end{array}$$

Kombiniert man diese Gleichungen in der angedeuteten Weise, so erhält man:

$$\frac{du}{dx_1}\frac{\partial v}{\partial p_1} + \frac{du}{dx_2}\frac{\partial v}{\partial p_2} + \frac{du}{dx_3}\frac{\partial v}{\partial p_3} - \frac{dv}{dx_1}\frac{\partial u}{\partial p_1} - \frac{dv}{dx_2}\frac{\partial u}{\partial p_2} - \frac{dv}{dx_3}\frac{\partial u}{\partial p_3} = [uv] = 0.$$

Die Integrale eines einzigen Systems liegen nicht in Involution, vorausgesetzt, daß $(S_1) \neq (S_2)$ ist. Ist jedoch $(S_1) = (S_2)$, d. h. sind die $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$, so liegen offenbar die Integrale des Systems in Involution.

Hat man 2 Zwischenintegrale: $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ und $\chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0$, so ist: $[\chi(u_1 u_2 u_3),\ \chi_1(v_1 v_2 v_3)] = 0$, da die Zwischenintegrale den Systemen (S_1) und (S_2) genügen.

Wie man leicht einsieht, kann das System (S_1) [bzw. (S_2)] höchstens 4 Integrale besitzen. Ein Integral des Systems (S_1) genügt nämlich auch den 3 Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} X_4(u) &\equiv X_1[X_2(u)] - X_2[X_1(u)] = 0 \\ X_5(u) &\equiv X_2[X_3(u)] - X_3[X_2(u)] = 0 \\ X_6(u) &\equiv X_3[X_1(u)] - X_1[X_3(u)] = 0 \end{aligned}$$

Führen wir die angedeuteten Operationen aus, und zwar unter der Voraussetzung, daß $C = 1$ ist, was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} X_4(u) \equiv{}& \frac{\partial u}{\partial z}(B_{12} - B_{21}) + \frac{\partial u}{\partial p_1}[X_2(B_{11}) - X_1(B_{12})] \\ &+ \frac{\partial u}{\partial p_2}[X_2(B_{21}) - X_1(B_{22})] + \frac{\partial u}{\partial p_3}[X_2(B_{31}) - X_1(B_{32})] \\ X_5(u) \equiv{}& \frac{\partial u}{\partial z}(B_{23} - B_{32}) + \frac{\partial u}{\partial p_1}[X_3(B_{12}) - X_2(B_{13})] \\ &+ \frac{\partial u}{\partial p_2}[X_3(B_{22}) - X_2(B_{23})] + \frac{\partial u}{\partial p_3}[X_3(B_{32}) - X_2(B_{33})] \\ X_6(u) \equiv{}& \frac{\partial u}{\partial z}(B_{31} - B_{13}) + \frac{\partial u}{\partial p_1}[X_1(B_{13}) - X_3(B_{11})] \\ &+ \frac{\partial u}{\partial p_2}[X_1(B_{23}) - X_3(B_{21})] + \frac{\partial u}{\partial p_3}[X_1(B_{33}) - X_3(B_{31})] \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\begin{aligned} X_4(u) &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_1 \frac{\partial u}{\partial p_3} \\ X_5(u) &\equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_2 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_2 \frac{\partial u}{\partial p_3} \\ X_6(u) &= \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_3 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_3 \frac{\partial u}{\partial p_3} \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen erhalten wir für die andern Integrale.

Hätte man nun 5 erste Integrale, so bekäme man auch 5 Gleichungen: $X_4(u_i) = 0_{\,|\,i=1,\ldots 5}$; es ist aber klar, daß nur 4 dieser Gleichungen unabhängig voneinander bestehen können. Dasselbe gilt für die Gleichungen: $X_5(u_i) = 0$ und $X_6(u_i) = 0$: es gibt also nur 4 voneinander unabhängige Integrale.

Soll das System (S_1) 4 Integrale besitzen, so muß es ein „vollständiges“ System sein, d. h. es muß sein:

$$X_4(u_i) = 0, \quad X_5(u_i) = 0, \quad X_6(u_i) = 0 \mid i = 1, 2, 3, 4.$$

Hieraus folgt, wie man leicht einsieht:

$$\left\{\begin{array}{l} B_{12} = B_{21};\ X_2(B_{11}) = X_1(B_{12});\ X_2(B_{21}) = X_1(B_{22});\ X_2(B_{31}) = X_1(B_{32}); \\ B_{23} = B_{32};\ X_3(B_{12}) = X_2(B_{13});\ X_3(B_{22}) = X_2(B_{23});\ X_3(B_{32}) = X_2(B_{33}); \\ B_{31} = B_{13};\ X_1(B_{13}) = X_2(B_{11});\ X_1(B_{23}) = X_3(B_{21});\ X_1(B_{33}) = X_3(B_{31}). \end{array}\right. \quad (11)$$

Nehmen wir statt des Systems (S_1) das äquivalente System (S_3), so erhalten wir ähnliche Gleichungen für die A_{ik}. Es ist also: $A_{ik} = A_{ki}$, so daß die Systeme (S_1) und (S_2) identisch werden.

Wir haben demnach den Satz:

Soll eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung 4 erste Integrale besitzen, die miteinander in Involution liegen, so müssen die Systeme (S_1) und (S_2) identisch sein und es müssen die Bedingungsgleichungen (11) bestehen.

Ist für eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung $(S_1) = (S_2)$, d. h. ist $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$, so hat man die Gleichung:

$$X_4(u) = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_1 \frac{\partial u}{\partial p_3} = 0.$$

Hat nun die gegebene Differentialgleichung 3 Integrale, so hat man 3 solche Gleichungen; diese 3 Gleichungen sind aber nur dann voneinander unabhängig, wenn: $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\delta_1 = 0$ ist. Ebenso folgert man aus den Gleichungen: $X_5(u) = 0$ und $X_6(u) = 0$, daß $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$, $\delta_2 = 0$ und $\delta_3 = 0$ ist, vorausgesetzt, daß $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$ ist. Dies sind aber die Bedingungsgleichungen (11); wir haben also den Satz:

Ist für eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung

$$A_{ik} = A_{ki} \text{ und } B_{ik} = B_{ki}$$

und hat diese Gleichung 3 erste Integrale, so existiert stets noch ein 4. von diesen unabhängiges Integral.

Aus Obigem geht ferner der Satz hervor:

Hat eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung 3 erste Integrale, die miteinander in Involution liegen und ist $B_{ik} = B_{ki}$, so ist auch $A_{ik} = A_{ki}$, d. h. (S_1) fällt mit (S_2) zusammen.

Der Satz gilt auch, wenn man B mit A vertauscht.

Ist das System (S_1) kein vollständiges, d. h. besitzt es keine 4 Integrale, so verschwinden $X_4(u)$, $X_5(u)$, $X_6(u)$ nicht alle identisch.

Besteht das vollständige System z. B. aus den Gleichungen:

$$X_1(u) = 0, \quad X_2(u) = 0, \quad X_3(u) = 0, \quad X_4(u) = 0,$$

so müssen sich die Ausdrücke

$$X_5(u),\ X_6(u) \text{ und } X_iX_4(u) - X_4X_i(u) \mid_{i=1,2,3}$$

linear durch die linken Seiten dieser Gleichung ausdrücken lassen.

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} X_7(u) &= X_1[X_4(u)] - X_4[X_1(u)] - \frac{\partial u}{\partial z}[X_1(\alpha_1) - \beta_1] + \frac{\partial u}{\partial p_1}[X_1(\beta_1) + X_4(B_{11})] \\ &+ \frac{\partial u}{\partial p_2}[X_1(\gamma_1) + X_4(B_{21})] + \frac{\partial u}{\partial p_3}[X_1(\delta_1) + X_4(B_{31})] \\ &= \alpha_4 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_4 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_4 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_4 \frac{\partial u}{\partial p_3}, \end{aligned}$$

so erhält man ganz entsprechend:

$$X_8(u) \quad X_2[X_4(u)] - X_4[X_2(u)] = \alpha_5 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_5 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_5 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_5 \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_9(u) - X_3[X_4(u)] - X_4[X_3(u)] \quad = \alpha_6 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_6 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_6 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_6 \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

Da die Ausdrücke $X_i(u) \mid_{i=5..9}$ keine partiellen Ableitungen von u nach x_i enthalten, so müssen sie offenbar identisch sein mit $X_4(u)$; es muß also sein:

$$\alpha_1 = \lambda_i \alpha_i;\ \beta_1 = \lambda_i \beta_i;\ \gamma_1 = \lambda_i \gamma_i \text{ und } \delta_1 = \lambda_i \delta_i, \quad \mid_{i=2..6},$$

wo die λ_i irgendwelche Faktoren sind. Dieselben Bedingungsgleichungen erhält man, wenn man an Stelle von $X_4(u) = 0$ die Gleichung $X_5(u) = 0$ oder $X_6(u) = 0$ treten läßt.

Hat das System (S_1) nur 2 Integrale, so wird es erst vollständig durch Hinzufügen von 2 Gleichungen z. B. $X_4(u) = 0$ und $X_5(u) = 0$.

Bildet man nun noch:

$$X_{10}(u) \quad X_1[X_5(u)] - X_5[X_1(u)] = \alpha_7 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_7 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_7 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_7 \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{11}(u) \quad X_2[X_5(u)] - X_5[X_2(u)] = \alpha_8 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_8 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_8 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_8 \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{12}(u) - X_3[X_5(u)] - X_5[X_3(u)] = \alpha_9 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_9 \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_9 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_9 \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{13}(u) - X_4[X_5(u)] - X_5[X_4(u)] = \alpha_{10} \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{10} \frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{10} \frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{10} \frac{\partial u}{\partial p_3}$$

so müssen sich die Ausdrücke: $X_i(u) \mid_{i=6\ldots13}$ linear aus $X_4(u)$ und $X_5(u)$ ableiten lassen. Es muß also sein: $\alpha_i = \lambda_i \alpha_1 + \mu_i \alpha_2 \mid_{i=3\ldots10}$. Dieselben Bedingungsgleichungen erhält man, wenn man an Stelle von $X_4(u) = 0$ und $X_5(u) = 0$ die Gleichungen $X_5(u) = 0$, $X_6(u) = 0$ oder: $X_6(u) = 0$, $X_4(u) = 0$ oder auch $X_i(u) = 0$, $X_i X_k(u) - X_k X_i(u) = 0 \mid_{\substack{i=4,5,6 \\ k=1,2,3}}$ nimmt.

Hat das System (S_1) nur 1 Integral, so muß man alle 3 Glei-

chungen $X_4(u)=0$, $X_5(u)=0$, $X_6(u)=0$ hinzufügen, um das System vollständig zu machen. Wir bilden noch:

$$X_{14}(u) = X_1[X_6(u)] - X_6[X_1(u)] = \alpha_{11}\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{11}\frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{11}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{11}\frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{15}(u) = X_2[X_6(u)] - X_6[X_2(u)] = \alpha_{12}\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{12}\frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{12}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{12}\frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{16}(u) = X_3[X_6(u)] - X_6[X_3(u)] = \alpha_{13}\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{13}\frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{13}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{13}\frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{17}(u) = X_4[X_6(u)] - X_6[X_4(u)] = \alpha_{14}\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{14}\frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{14}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{14}\frac{\partial u}{\partial p_3}$$

$$X_{18}(u) = X_5[X_6(u)] - X_6[X_5(u)] = \alpha_{15}\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_{15}\frac{\partial u}{\partial p_1} + \gamma_{15}\frac{\partial u}{\partial p_2} + \delta_{15}\frac{\partial u}{\partial p_3}$$

Es müssen sich nun die Ausdrücke $X_i(u)_{\,i=7\ldots18}$ linear aus $X_4(u)$, $X_5(u)$ und $X_6(u)$ ableiten lassen; es muß also sein:

$$D_i = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix}_{i=4\ldots15.} = 0.$$

Wir haben nun folgenden Satz:

Soll das System (S_1) 3 Integrale besitzen, so müssen die 2reihigen Unterdeterminanten von D_i verschwinden.

Soll das System (S_1) 2 Integrale besitzen, so müssen die 3reihigen Unterdeterminanten von D_i verschwinden.

Soll das System (S_1) nur 1 Integral besitzen, so genügt es, wenn die Determinanten D_i verschwinden.

Hat das System (S_1) kein Integral, so ist mindestens eine der Determinanten D_i nicht gleich Null.

§ 6. Herleitung der Gleichung I aus dem allgemeinen Integral.

Gegeben sei eine ∞^4fache Mannigfaltigkeit von ∞^3 Punkten:

$$z = f(x_1 x_2 x_3 a_1 a_2 a_3 a_4) \tag{12}$$

im 4dimensionalen Raum.

Wir greifen nun durch die 3 Gleichungen:

$$a_2 = \chi_1(a_1); \quad a_3 = \chi_2(a_1) \quad \text{und} \quad a_4 = \chi_3(a_1) \tag{13}$$

eine ∞^1fache Mannigfaltigkeit von ∞^3 Punkten heraus; diese letzteren ∞^1 Gebilde haben als Einhüllende ein Gebilde, dessen partielle Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung aufgestellt werden können.

Durch partielle Ableitung der Gleichung (12), worin a_2, a_3 und a_4 vermittelst der Gleichung (13) durch a_1 ersetzt werden, erhält man:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} \quad | i=1,2,3.$$

Da nun für die Einhüllende $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$ ist, so hat man für dieselbe:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3. \tag{14}$$

Aus diesen 3 Gleichungen und aus der Gleichung (12) können wir je 3 der Konstanten $a_1 .. a_4$ eliminieren. Auf diese Weise erhalten wir 4 erste Integrale: $u_i = a_i \mid i=1,2,3,4$, wobei die u_i Funktionen von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 sind.

Außerdem erhält man wegen der Gleichungen (13) die 3 Zwischenintegrale:

$$u_2 = \chi_1(u_1), \; u_3 = \chi_2(u_1) \text{ und } u_4 = \chi_3(u_1).$$

Um aus den Gleichungen (14) noch die Größen a_1 und $\chi_i(a_1)$ zu eliminieren, differentiieren wir nochmals partiell nach x_1, x_2, x_3, wobei z und a_1 als Funktionen von x_1, x_2 und x_3 angesehen werden.

Man erhält mit Rücksicht auf $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$:

$$p_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1};$$

$$p_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2};$$

$$p_{33} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3};$$

$$p_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1};$$

$$p_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1};$$

$$p_{23} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2}.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial a_1}$ und $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}$, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} & p_{12} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & p_{13} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ p_{21} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & p_{22} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & p_{23} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ p_{31} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & p_{32} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & p_{33} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

denn es ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man die Determinante (15) aus, so erhält man die Gleichung:

$$\delta_{11}p_{11}+\delta_{22}p_{22}+\delta_{33}p_{33}+2\delta_{12}p_{12}+2\delta_{13}p_{13}+2\delta_{23}p_{23}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta_{11}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta_{22}$$
$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\Delta_{33}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\Delta_{12}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\Delta_{13}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\Delta_{23}+\Delta-\delta=0. \qquad (16)$$

Hiebei haben die Δ_{ik} ihre frühere Bedeutung und δ_{ik} ist die zu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ gehörige Unterdeterminante von:

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (15) bzw. (16) für

$$a_1,\ \chi_1(a_1)=a_2,\ \chi_2(a_1)=a_3 \text{ und } \chi_3(a_1)=a_4$$

die entsprechenden Werte u_1, u_2, u_3 und u_4 ein, so haben wir eine Gleichung von der Form I und wir haben den Satz:

Hat man im 4 dimensionalen Raum eine ∞^4fache Mannigfaltigkeit von ∞^3Punkten, so stellen die Enveloppen einer ∞^1 Mannigfaltigkeit dieses Komplexes die Integralgebilde einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung I dar; dieselbe besitzt in diesem Fall 4 erste Integrale $u_1=a_1$, $u_2=a_2$, $u_3=a_3$, $u_4=a_4$ und 3 Zwischenintegrale:

$$u_2=\chi_1(u_1);\ u_3=\chi_2(u_1);\ u_4=\chi_3(u_1),$$

wo die u_i bestimmte Funktionen von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 sind; ihr allgemeines Integral ist von der Form:

$$\left\{ \begin{array}{l} F[x_1,\ x_2,\ x_3;\ z;\ a_1,\ \chi_1(a_1),\ \chi_2(a_1),\ \chi_3(a_1)]=0 \\ \qquad\qquad \frac{dF}{da_1}=0 \end{array} \right\} \qquad (17)$$

Vergleicht man die Determinante (15) mit der Determinante (6), so ergibt sich hieraus sofort, daß für die Gleichung (16) die Bedingungsgleichungen (7) erfüllt sind. Wollen wir die Gleichung (16) auf die Form III bringen, so müssen wir die A_{12}, A_{21} usw. berechnen; es zeigt sich aber, daß die Diskriminanten der quadratischen Gleichung (9) und (10) verschwinden.

Die Gleichung (16) ist also ein Spezialfall der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, da $A_{ik}=A_{ki}$ und $B_{ik}=B_{ki}$ ist.

Die Gleichung (16) in der Form III geschrieben, lautet:

$$\delta_{11}p_{11}+\delta_{22}p_{22}+\delta_{33}p_{33}+(\delta_{12}+\delta_{12})p_{12}+(\delta_{13}+\delta_{13})p_{13}+(\delta_{23}+\delta_{23})p_{23}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta_{11}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta_{22}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\Delta_{33}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)\Delta_{12}$$
$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\right)\Delta_{13}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\right)\Delta_{23}+\Delta-\delta=0.$$

Ist für eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung $A_{ik}=A_{ki}$ und $B_{ik}=B_{ki}$, so muß sie noch kein Integral von der Form (17) besitzen; es besteht vielmehr, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, der Satz:

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung ein allgemeines Integral von der Form (17) besitzt, sind:

$$A_{ik}=A_{ki},\quad B_{ik}=B_{ki}$$
$$X_2(B_{11})=X_1(B_{12});\ X_2(B_{12})=X_1(B_{22});\ X_2(B_{13})=X_1(B_{32});$$
$$X_3(B_{12})=X_2(B_{13});\ X_3(B_{22})=X_2(B_{23});\ X_3(B_{23})=X_2(B_{33});$$
$$X_1(B_{13})=X_3(B_{11});\ X_1(B_{32})=X_3(B_{21});\ X_1(B_{33})=X_3(B_{31}),$$

wobei:

$$X_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial}{\partial z}-\frac{B_{1i}}{C}\frac{\partial}{\partial p_1}-\frac{B_{2i}}{C}\frac{\partial}{\partial p_2}-\frac{B_{3i}}{C}\frac{\partial}{\partial p_3}.$$

III. Kapitel.

Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

§ 1. Invarianz der Monge-Ampèreschen Form einer Differentialgleichung.

Nach der Theorie der Berührungstransformationen bestimmen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &x' = X_1(x_1 x_2 x_3 z p_1 p_2 p_3);\ x'_2 = X_2(x_1 \cdots p_3);\ x'_3 = X_3(x_1 \cdots p_3);\\ &z' = Z(x_1 x_2 \cdots p_3);\ p'_1 = P_1(x_1 \cdots p_3);\ p'_2 = P_2(x_1 \cdots p_3);\ p'_3 = P_3(x_1 \cdots p_3) \end{aligned}\right\} (17)$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn:

$$\left.\begin{aligned} &[ZX_1] = [ZX_2] = [ZX_3] = [X_1X_2] = [X_1X_3] = [X_2X_3] = [P_1X_2]\\ &= [P_1X_3] = [P_2X_1] = [P_2X_3] = [P_3X_1] = [P_3X_2] = 0,\\ &[P_1X_1] = [P_2X_2] = [P_3X_3] = \varrho\\ &\text{und}\quad [P_1Z] = \varrho P_1;\ [P_2Z] = \varrho P_2;\ [P_3Z] = \varrho P_3 \quad \text{ist.} \end{aligned}\right\} (18)$$

Man findet alsdann p_{ik} als Funktionen von $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$ ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{dX_1}{dx_i}\right)p'_{11} + \left(\frac{dX_2}{dx_i}\right)p'_{12} + \left(\frac{dX_3}{dx_i}\right)p'_{13} - \left(\frac{dP_1}{dx_i}\right) = 0\\ &\left(\frac{dX_1}{dx_i}\right)p'_{21} + \left(\frac{dX_2}{dx_i}\right)p'_{22} + \left(\frac{dX_3}{dx_i}\right)p'_{23} - \left(\frac{dP_2}{dx_i}\right) = 0\\ &\left(\frac{dX_1}{dx_i}\right)p'_{31} + \left(\frac{dX_2}{dx_i}\right)p'_{32} + \left(\frac{dX_3}{dx_i}\right)p'_{33} - \left(\frac{dP_3}{dx_i}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2, 3.$$

wo:

$$\left(\frac{d}{dx_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z}p_i + \frac{\partial}{\partial p_1}p_{1i} + \frac{\partial}{\partial p_2}p_{2i} + \frac{\partial}{\partial p_3}p_{3i}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$p'_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{dP_1}{dx_1}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_1}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_1}\right) \\ \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right) \\ \left(\frac{dP_1}{dx_3}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\frac{dX_1}{dx_1}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_1}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_1}\right) \\ \left(\frac{dX_1}{dx_2}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_2}\right) \\ \left(\frac{dX_1}{dx_3}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx_3}\right) & \left(\frac{dX_3}{dx_3}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\left(\begin{matrix} P_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)};$$

$$p'_{22} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 P_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \quad p'_{33} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 P_3 \\ x_1 x_3 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \quad p'_{12} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 P_1 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} P_2 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)};$$

$$p'_{13} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 P_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} P_3 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \qquad p'_{23} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 P_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} X_1 P_3 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}.$$

Ebenso erhält man:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \end{vmatrix} = \frac{\left(\begin{matrix} P_1 P_2 P_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_2 \end{matrix}\right)};$$

$$\Delta'_{11} = \frac{\left(\begin{matrix} P_2 P_3 X_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \quad \Delta'_{22} = \frac{\left(\begin{matrix} P_3 P_1 X_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \quad \Delta'_{33} = \frac{\left(\begin{matrix} P_1 P_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)};$$

$$\Delta'_{12} = \frac{\left(\begin{matrix} P_2 P_3 X_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} - \frac{\left(\begin{matrix} P_3 P_1 X_1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}; \quad \Delta'_{13} = \frac{\left(\begin{matrix} P_2 P_3 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} P_1 P_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)};$$

$$\Delta'_{23} = \frac{\left(\begin{matrix} P_3 P_1 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\begin{matrix} P_1 P_2 X_2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{matrix}\right)}.$$

Die Größen p'_{ik} und Δ'_{ik} stellen sich also als Quotienten von 2 Determinanten dar, wobei die Nennerdeterminante überall dieselbe ist.

Denkt man sich die obigen Werte für p'_{ik} und Δ'_{ik} in die transformierte Gleichung:

$$F' \equiv A'_{11}p'_{11} + A'_{22}p'_{22} + A'_{33}p'_{33} + 2A'_{12}p'_{12} + 2A'_{13}p'_{13} + 2A'_{23}p'_{23}$$
$$+ B'_{11}\Delta'_{11} + B'_{22}\Delta'_{22} + B'_{33}\Delta'_{33} + 2B'_{12}\Delta'_{12} + 2B'_{13}\Delta'_{13} + 2B'_{23}\Delta'_{23} + C'\Delta' + D' = 0$$

eingesetzt und bedenkt man, daß jede der obigen Determinanten

zufolge Kap. II § 1 die linke Seite einer Gleichung von der Form I darstellt, so folgt daraus der Satz:

Eine Berührungstransformation führt immer eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung I in eine ebensolche Gleichung über.

§ 2. Invarianz der Bedingungsgleichungen (7).

Wie wir soeben gesehen haben, bleibt bei einer Berührungstransformation die Form der Differentialgleichung I erhalten. Da nun aber nach unserer Voraussetzung für die Monge-Ampèreschen Gleichungen die Bedingungsgleichungen (7) erfüllt sein müssen, so fragt es sich, ob auch für die transformierte Gleichung die analogen Bedingungsgleichungen bestehen.

Wir schreiben die Gleichung I in der Form:

$$F = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{19}$$

wobei:

$$\sigma_{1i} = l_1\left(\frac{dx_1}{dx_i}\right) + l_2\left(\frac{dx_2}{dx_i}\right) + l_3\left(\frac{dx_3}{dx_i}\right) + l_4\left(\frac{dp_1}{dx_i}\right) + l_5\left(\frac{dp_2}{dx_i}\right) + l_6\left(\frac{dp_3}{dx_i}\right),$$

$$\sigma_{2i} = m_1\left(\frac{dx_1}{dx_i}\right) + m_2\left(\frac{dx_2}{dx_i}\right) + m_3\left(\frac{dx_3}{dx_i}\right) + m_4\left(\frac{dp_1}{dx_i}\right) + m_5\left(\frac{dp_2}{dx_i}\right) + m_6\left(\frac{dp_3}{dx_i}\right),$$

$$\sigma_{3i} = n_1\left(\frac{dx_1}{dx_i}\right) + n_2\left(\frac{dx_2}{dx_i}\right) + n_3\left(\frac{dx_3}{dx_i}\right) + n_4\left(\frac{dp_1}{dx_i}\right) + n_5\left(\frac{dp_2}{dx_i}\right) + n_6\left(\frac{dp_3}{dx_i}\right)$$

und wo: $\left(\frac{d}{dx_i}\right)$ dieselbe Bedeutung hat, wie im vorigen Paragraphen.

Die l, m, n sind Funktionen von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3.

Durch Ausrechnen der Determinante erhält man:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} l_2 & l_3 & l_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 \\ n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} l & m & n \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix};\ A_{33} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};\ A_{12} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix};\ A_{32} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \\ A_{23} &= \begin{pmatrix} l & m & n \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};\ A_{13} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix};\ A_{21} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ A_{31} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \\ D &= \begin{pmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ B_{11} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix};\ B_{12} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix};\ B_{13} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} l & m & n \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ B_{21} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ B_{23} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};\ B_{33} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \\ B_{32} &= \begin{pmatrix} l & m & n \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix};\ B_{31} = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß zwischen diesen Größen die Bedingungsgleichungen (7) bestehen.

Durch eine Berührungstransformation wird die Gleichung $F \equiv 0$ in die Gleichung:

$$F' \equiv \begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{21} & \sigma'_{31} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} & \sigma'_{32} \\ \sigma'_{13} & \sigma'_{23} & \sigma'_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

transformiert, wobei

$\sigma'_{1i} = l'_1\left(\frac{dx'_1}{dx'_i}\right) + l'_2\left(\frac{dx'_2}{dx'_i}\right) + l'_3\left(\frac{dx'_3}{dx'_i}\right) + l'_4\left(\frac{dp'_1}{dx'_i}\right) + l'_5\left(\frac{dp'_2}{dx'_i}\right) + l'_6\left(\frac{dp'_3}{dx'_i}\right)$ ist.

Entsprechend erhält man: σ'_{2i} und σ'_{3i}.

$F' = 0$ stellt nun ebenfalls eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung von der Form (19) dar und zwar ergeben sich die A'_{11} usw. aus den l'_i, m'_i, n'_i ganz entsprechend wie in den Gleichungen (20) die A_{11} usw. aus den l_i, m_i, n_i; es bestehen also zwischen den Größen A'_{11} usw. dieselben Gleichungen, wie zwischen den A_{11} usw. und wir haben demnach den Satz:

Eine Monge-Ampèresche Gleichung von der Form I, zwischen deren Koeffizienten die Bedingungsgleichungen (7) bestehen, geht durch eine Berührungstransformation in eine ebensolche Gleichung über, zwischen deren Koeffizienten dieselben Bedingungsgleichungen stattfinden.

§ 3. Invarianz der Systeme IV und V.

Aus dem vorhergehenden Satz können wir sofort schließen, daß das Integrationssystem (IV) bzw. (V) durch eine Berührungstransformation in das entsprechende System (IV′) bzw. (V′) transformiert wird.

Um dies direkt zu beweisen, benützen wir für die Monge-Ampèresche Differentialgleichung die Darstellungsweise des vorhergehenden Paragraphen.

In die transformierte Gleichung (21) führen wir die alten Variabeln x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 wieder ein, d. h. wir ersetzen p'_{11} usw. durch die Werte auf Seite 33 und die x'_1, x'_2, x'_3, z', p'_1, p'_2, p'_3 in den Koeffizienten A'_{11} usw. durch X_1, X_2, X_3, Z, P_1, P_2, P_3. Es unterscheiden sich nun offenbar die Größen F und $\begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} \cdot F'$ nur durch einen Faktor, der eine Funktion von x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 ist.

Setzen wir der Einfachheit halber diesen Faktor $= 1$, so ist also: $F = \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} \cdot F''$, wo in F'' wieder die ursprünglichen Größen x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3 eingeführt sind.

Man hat demnach:

$$F \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot F' \equiv \begin{vmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

wo:

$k_{1i} = l'_1 \left(\frac{dx_1}{dx_i}\right) + l'_2 \left(\frac{dx_2}{dx_i}\right) + l'_3 \left(\frac{dx_3}{dx_i}\right) + l'_4 \left(\frac{dP_1}{dx_i}\right) + l'_5 \left(\frac{dP_2}{dx_i}\right) + l'_6 \left(\frac{dP_3}{dx_i}\right)$ ist:

entsprechend k_{2i} und k_{3i}.

Durch Vergleichung der Determinante (22) mit der Determinante (19) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} l_i &= l'_1 \frac{dX_1}{dx_i} + l'_2 \frac{dX_2}{dx_i} + l'_3 \frac{dX_3}{dx_i} + l'_4 \frac{dP_1}{dx_i} + l'_5 \frac{dP_2}{dx_i} + l'_6 \frac{dP_3}{dx_i}, \quad i = 1, 2, 3 \\ l_{3+k} &= l'_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_k} + l'_2 \frac{X_2}{\partial p_k} + l'_3 \frac{\partial X_3}{\partial p_k} + l'_4 \frac{\partial P_1}{\partial p_k} + l'_5 \frac{\partial P_2}{\partial p_k} + l'_6 \frac{\partial P_3}{\partial p_k}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\text{wo: } \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial z} p_i \text{ ist.}$$

Die m und n ergeben sich in ganz analoger Weise aus den m' und n'.

Wir wenden nun die Berührungstransformation (17) auf die 1. Gleichung des Systems IV an. Es ist:

$$B_{11}\mathrm{d}x_1 + B_{12}\mathrm{d}x_2 + B_{13}\mathrm{d}x_3 + C\mathrm{d}p_1 = \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 + \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_2 + \begin{pmatrix} l & m & n \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \mathrm{d}x_3 + \begin{pmatrix} l & m & n \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathrm{d}p_1 = 0.$$

Ersetzt man hierin die l, m, n durch die Werte (23) und die in letzteren auftretenden l', m', n' durch die Werte:

$$A'_{11} = \begin{pmatrix} l' & m' & n' \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}^{22}),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \Big\{ & \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & P_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{11} + \begin{pmatrix} X_3 & X_1 & P_2 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{22} + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & P_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{33} + \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & P_2 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{12} \\ & + \begin{pmatrix} X_3 & X_1 & P_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{21} + \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & P_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{13} + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & P_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{31} + \begin{pmatrix} X_3 & X_1 & P_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{23} \\ & + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & P_2 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} A'_{32} + \begin{pmatrix} P_2 & P_4 & X_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{11} + \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & X_2 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{22} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & X_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{33} \\ & + \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & X \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{12} + \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & X_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{21} + \begin{pmatrix} P_2 & P_3 & X_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{13} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & X_1 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{31} \\ & + \begin{pmatrix} P_3 & P_1 & X_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{23} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & X_2 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} B'_{32} + \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} C' + \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ p_2 & p_3 & x_i \end{pmatrix} D' \Big\} \mathrm{d}x_i \\ & + \Big\{ \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & P_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} A'_{11} + \begin{pmatrix} X_3 & X_1 & P_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} A'_{22} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \Big\} \mathrm{d}p_1 = 0, \end{aligned}$$

22) S. die Gleichungen (20).

wo die 2. Klammer aus der ersten dadurch hervorgeht, daß man $p_2 p_3 x_i$ durch $p_1 p_2 p_3$ ersetzt.

Bedenkt man nun, daß:

$$dx'_i = dX_i = \frac{dX_i}{dx_1} dx_1 + \frac{dX_i}{dx_2} x_2 + \frac{dX_i}{dx_3} dx_3 + \frac{\partial X_i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial X_i}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial X_i}{\partial p_3} dp_3$$

und

$$dp'_i = dP_i = \frac{dP_i}{dx_1} dx_1 + \frac{dP_i}{dx_2} x_2 + \frac{dP_i}{dx_3} dx_3 + \frac{\partial P_i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial P_i}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial P_i}{\partial p_3} dp_3 \; {}_{i=1,2,3}$$

ist, so erhält man aus obiger Gleichung:

$$\begin{aligned}
&A'_{11}\left\{\binom{X_2 X_3}{p_2 p_3} dp'_1 + \binom{X_3 P_1}{p_2 p_3} dx'_2 + \binom{P_1 X_2}{p_2 p_3} dx'_3\right\} \\
+\,&A'_{22}\left\{\binom{X_3 X_1}{p_2 p_3} dp'_2 + \binom{X_1 P_2}{p_2 p_3} dx'_3 + \binom{P_2 X_3}{p_2 p_3} dx'_1\right\} \\
+\,&A'_{33}\left\{\binom{X_1 X_2}{p_2 p_3} dp'_3 + \binom{X_2 P_3}{p_2 p_3} dx'_1 + \binom{P_3 X_1}{p_2 p_3} dx'_2\right\} \\
+\,&A'_{12}\left\{\binom{X_2 X_3}{p_2 p_3} dp'_2 + \binom{X_3 P_2}{p_2 p_3} dx'_2 + \binom{P_2 X_2}{p_2 p_3} dx'_3\right\} \\
+\,&A'_{21}\left\{\binom{X_3 X_1}{p_2 p_2} dp'_1 + \binom{X_1 P_1}{p_2 p_3} dx'_3 + \binom{P_1 X_3}{p_2 p_3} dx'_1\right\} \\
+\,&A'_{13}\left\{\binom{X_2 X_3}{p_2 p_3} dp'_3 + \binom{X_3 P_3}{p_2 p_3} dx'_2 + \binom{P_3 X_2}{p_2 p_3} dx'_3\right\} \\
+\,&A'_{31}\left\{\binom{X_1 X_2}{p_2 p_3} dp'_1 + \binom{X_2 P_1}{p_2 p_3} dx'_1 + \binom{P_1 X_1}{p_2 p_3} dx'_2\right\} \\
+\,&A'_{23}\left\{\binom{X_3 X_1}{p_2 p_3} dp'_3 + \binom{X_1 P_3}{p_2 p_3} dx'_3 + \binom{P_3 X_3}{p_2 p_3} dx'_1\right\} \\
+\,&A'_{32}\left\{\binom{X_1 X_2}{p_2 p_3} dp'_2 + \binom{X_2 P_2}{p_2 p_3} dx'_1 + \binom{P_2 X_1}{p_2 p_3} dx'_2\right\} \\
+\,&B'_{11}\left\{\binom{P_2 P_3}{p_2 p_3} dx'_1 + \binom{P_3 X_1}{p_2 p_3} dp'_2 + \binom{X_1 P_2}{p_2 p_3} dp'_3\right\} \\
+\,&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+\,&B'_{32}\left\{\binom{P_1 P_2}{p_2 p_3} dx'_2 + \binom{P_2 X_2}{p_2 p_3} dp'_1 + \binom{X_2 P_1}{p_2 p_3} dp'_2\right\} \\
+\,&C'\left\{\binom{P_1 P_2}{p_2 p_3} dp'_3 + \binom{P_2 P_3}{p_2 p_3} dp'_1 + \binom{P_3 P_1}{p_2 p_3} dp'_2\right\} \\
+\,&D'\left\{\binom{X_1 X_2}{p_2 p_3} dx'_3 + \binom{X_2 X_3}{p_2 p_3} dx'_1 + \binom{X_3 X_1}{p_2 p_3} dx'_2\right\} = 0,
\end{aligned}$$

wo sich die Koeffizienten von B'_{ik} aus den entsprechenden Koeffizienten von A'_{ik} durch Vertauschen von X_i mit P_i und x'_i mit p'_i und umgekehrt ergeben.

Die letzte Gleichung können wir in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned}
&\binom{P_2 P_3}{p_2 p_3} \cdot \left\{B'_{11} dx'_1 + B'_{12} dx'_2 + B'_{13} dx'_3 + C' dp'_1\right\} \\
+\,&\binom{P_3 P_1}{p_2 p_3} \cdot \left\{B'_{21} dx'_1 + B'_{22} dx_2 + B'_{23} dx'_3 + C' dp'_1\right\}
\end{aligned}$$

$$+\begin{pmatrix} P_1 P_2 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ B'_{31}\, dx'_1 + B'_{32}\, dx'_2 + B'_{33}\, dx'_3 + C'\, dp'_3 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_2 X_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ A'_{11}\, dp'_1 + A'_{21}\, dp'_2 + A'_{31}\, dp'_3 + D'\, dx'_1 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_3 X_1 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ A'_{21}\, dp'_1 + A'_{22}\, dp'_2 + A'_{23}\, dp'_3 + D'\, dx'_2 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_1 X_2 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ A'_{31}\, dp'_1 + A'_{32}\, dp'_2 + A'_{33}\, dp'_3 + D'\, dx'_3 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_1 P_1 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{31}\, dx'_2 + A'_{21}\, dx'_3 + B'_{31}\, dp'_2 - B'_{21}\, dp'_3 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_1 P_2 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{32}\, dx'_2 + A'_{22}\, dx'_3 + B'_{11}\, dp'_3 - B'_{31}\, dp'_1 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_1 P_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{33}\, dx'_2 + A'_{23}\, dx'_3 + B'_{21}\, dp'_1 - B'_{11}\, dp'_2 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_2 P_1 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{11}\, dx'_3 + A'_{31}\, dx'_1 + B'_{32}\, dp'_2 - B'_{22}\, dp'_3 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_2 P_2 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{12}\, dx'_3 + A'_{32}\, dx'_1 + B'_{12}\, dp'_3 - B'_{32}\, dp'_1 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_2 P_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{13}\, dx'_3 + A'_{33}\, dx'_1 + B'_{22}\, dp'_1 - B'_{12}\, dp'_2 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_3 P_1 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{21}\, dx'_1 + A'_{11}\, dx'_2 + B'_{33}\, dp'_2 - B'_{23}\, dp'_3 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_3 P_2 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{22}\, dx'_1 + A'_{12}\, dx'_2 + B'_{13}\, dp'_3 - B'_{33}\, dp'_1 \right\}$$
$$+\begin{pmatrix} X_3 P_3 \\ p_2 p_3 \end{pmatrix} \cdot \left\{ -A'_{23}\, dx'_1 + A'_{13}\, dx'_2 + B'_{23}\, dp'_1 - B'_{13}\, dp'_2 \right\} = 0.$$

Die transformierte 1. Gleichung des Systems IV stellt sich also als eine lineare Kombination der 15 Gleichungen des transformierten Systems (IV′) dar. Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß auch jede andere Gleichung des Systems IV in eine lineare Kombination obiger 15 Klammerausdrücke übergeht, womit der direkte Beweis für die Invarianz des Systems IV erbracht ist.

Die 1. Integrale einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung gehen bei einer Berührungstransformation in die entsprechenden 1. Integrale der transformierten Gleichung über, so daß also eine Gleichung I mit i ersten Integralen übergeht in eine Gleichung von derselben Form mit ebenfalls i ersten Integralen.

§ 4. Invarianz der Bedingungen $A_{ik} \mp A_{ki}$, $B_{ik} \mp B_{ki}$.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen geht hervor, daß, wenn System IV $\equiv$ System V ist auch System IV′ $\equiv$ System V′ ist, und daß, wenn System IV $\not\equiv$ System V ist, auch System IV′ $\not\equiv$ System V′ sein muß. Ist also $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$, so muß auch $A'_{ik} = A'_{ki}$ und $B'_{ik} = B'_{ki}$ sein; ist aber umgekehrt $A_{ik} \neq A_{ki}$ und

$B_{ik} \neq B_{ki}$, so wissen wir noch nicht, ob für alle i und k auch $A'_{ik} \neq A'_{ki}$ und $B'_{ik} \neq B'_{ki}$ sein muß. Wir wollen deshalb im folgenden untersuchen, ob z. B. $A'_{12} \overset{+}{=} A'_{21}$, wenn $A_{12} \overset{+}{=} A_{21}$ ist.

Es ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\begin{aligned}A_{12} = &\begin{pmatrix} X_2 X_3 P_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{11} + \begin{pmatrix} X_2 X_3 P_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{12} + \begin{pmatrix} X_3 X_1 P_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{21} + \begin{pmatrix} X_3 X_1 P_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{22} \\ &+ \begin{pmatrix} X_3 X_1 P_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{23} + \begin{pmatrix} X_1 X_2 P_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{32} + \begin{pmatrix} X_1 X_2 P_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{33} + \begin{pmatrix} X_1 X_2 P_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{31} \\ &+ \begin{pmatrix} X_2 X_3 P_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} A'_{13} + \begin{pmatrix} P_2 P_3 X_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{11} + \begin{pmatrix} P_2 P_3 X_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{12} + \begin{pmatrix} P_3 P_1 X_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{21} \\ &+ \begin{pmatrix} P_3 P_1 P_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{22} + \begin{pmatrix} P_3 P_1 X_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{23} + \begin{pmatrix} P_1 P_2 X_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{32} + \begin{pmatrix} P_1 P_2 X_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{33} \\ &+ \begin{pmatrix} P_1 P_2 X_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{31} + \begin{pmatrix} P_2 P_3 X_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} B'_{13} + \begin{pmatrix} P_1 P_2 P_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} C' + \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} D'\end{aligned}$$

Ferner ist:

$$A_{21} = \begin{pmatrix} X_2 X_3 P_1 \\ x_3 x_1 p_1 \end{pmatrix} A'_{11} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 \\ x_3 x_1 p_1 \end{pmatrix} D',$$

wo sich die Koeffizienten von A'_{ik}, B'_{ik} und C′ aus den obigen durch Vertauschen von $x_2 x_3 p_2$ mit $x_3 x_1 p_1$ ergeben.

Wir bilden nun $A_{12} - A_{21}$ und berechnen in diesem Ausdruck die Koeffizienten von A'_{ik}, B'_{ik}, C' und D'.

Für den Koeffizienten von A'_{11} erhält man z. B.:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X_2 X_3 P_1 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_2 X_3 P_1 \\ x_3 x_1 p_1 \end{pmatrix} = &\frac{dX_2}{dx_3}\left[\frac{dP_1}{dx_2}\frac{dX_3}{dp_2} - \frac{dX_3}{dx_2}\frac{dP_1}{dp_2} + \frac{dP_1}{dx_1}\frac{dX_3}{dp_1} - \frac{dX_3}{dx_1}\frac{dP_1}{dp_1}\right] \\ &+ \frac{dX_3}{dx_3}\left[\frac{dX_2}{dx_2}\frac{dP_1}{dp_2} - \frac{dX_2}{dp_2}\frac{dP_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_1}\frac{dP_1}{dp_1} - \frac{dX_2}{dx_1}\frac{dP_1}{dp_1}\right] \\ &+ \frac{dP_1}{dx_3}\left[\frac{dX_3}{dx_2}\frac{dX_2}{dp_2} - \frac{dX_2}{dx_2}\frac{dX_3}{dp_2} + \frac{dX_3}{dx_1}\frac{dX_2}{dp_1} - \frac{dX_3}{dp_1}\frac{dX_2}{dx_1}\right]\end{aligned}$$

Nun ist aber gemäß den Formeln (18): $[X_3 P_1] = 0$, $[X_2 P_1] = 0$ und $[X_3 X_2] = 0$; der Koeffizient von A'_{11} wird demnach:

$$\begin{aligned}&\frac{dX_2}{dx_3}\left[\frac{dX_3}{dx_3}\frac{dP_1}{dp_1} - \frac{dP_1}{dx_3}\frac{dX_3}{dp_3}\right] + \frac{dX_3}{dx_3}\left[\frac{dX_2}{dp_2}\frac{dP_1}{dx_3} - \frac{dX_2}{dx_3}\frac{dP_1}{dp_2}\right] \\ &\qquad + \frac{dP_1}{dx_3}\left[\frac{dX_3}{dp_3}\frac{dX_2}{dx_3} - \frac{dX_2}{dp_3}\frac{dX_3}{dx_3}\right] = 0.\end{aligned}$$

Ebenso beweist man, daß die Koeffizienten von

A'_{22}, A'_{33}, B'_{11}, B'_{22}, B'_{33}, C' und D' verschwinden.

Der Koeffizient von A'_{12} ist:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X_2 X_3 P_2 \\ x_2 x_3 p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_2 X_3 P_2 \\ x_3 x_1 p_1 \end{pmatrix} = &\frac{dX_2}{dx_3}\left[-\frac{dX_3}{dx_2}\frac{dP_2}{dp_2} + \frac{dP_2}{dx_2}\frac{dX_3}{dp_2} - \frac{dX_3}{dx_1}\frac{dP_2}{dp_1} + \frac{dX_3}{dp_1}\frac{dP_2}{dx_1}\right] \\ &+ \frac{dX_3}{dx_3}\left[\frac{dX_2}{dx_2}\frac{dP_2}{dp_2} - \frac{dX_2}{dp_2}\frac{dP_2}{dx_2} + \frac{dX_2}{dx_1}\frac{dP_2}{dp_1} - \frac{dX_2}{dp_1}\frac{dP_2}{dx_1}\right] \\ &+ \frac{dP_2}{dx_3}\left[\frac{dX_3}{dx_2}\frac{dX_2}{dp_2} - \frac{dX_3}{dp_2}\frac{dX_2}{dx_2} + \frac{dX_3}{dx_1}\frac{dX_2}{dp_1} - \frac{dX_3}{dp_1}\frac{dX_2}{dx_1}\right]\end{aligned}$$

Da nach den Formeln (18):

$$[X_3 P_2] = 0,\ [X_2 P_2] = -\varrho \text{ und } [X_3 X_2] = 0$$

ist, so erhält man:

$$\frac{dX_2}{dx_3}\left[-\frac{dX_3}{dp_3}\frac{dP_2}{dx_3}+\frac{dX_3}{dx_3}\frac{dP_2}{dp_3}\right]+\frac{dX_3}{dx_3}\left[-\varrho-\frac{dX_2}{dx_3}\frac{dP_2}{dp_3}+\frac{dP_2}{dx_3}\frac{dX_2}{dp_3}\right]$$
$$+\frac{dP_2}{dx_3}\left[\frac{dX_2}{dx_3}\frac{dX_3}{dp_3}-\frac{dX_3}{dx_3}\frac{dX_2}{dp_3}\right]=-\varrho\frac{dX_3}{dx_3}.$$

Auf analoge Weise findet man die andern Koeffizienten und man erhält die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho}(A_{12}-A_{21}) = -\frac{dX_3}{dx_3}(A'_{12}-A'_{21}) - \frac{dX_1}{dx_3}(A'_{23}-A'_{32}) - \frac{dX_2}{dx_3}(A'_{31}-A'_{13})$$
$$+\frac{dP_3}{dx_3}(B'_{12}-B'_{21})+\frac{dP_1}{dx_1}(B'_{23}-B'_{32})+\frac{dP_2}{dx_3}(B'_{31}-B'_{13}).$$

Wenn also $A_{12} \overline{\overline{+}} A_{21}$ ist, so muß nicht notwendig $A'_{12} \overline{\overline{+}} A'_{21}$ sein und umgekehrt. Ist jedoch für alle i und k $A'_{ik} = A'_{ki}$ und $B'_{ik} = B'_{ki}$, so muß auch $A_{12} = A_{21}$ sein; ebenso muß für alle i und k $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$ sein, da sich die andern Ausdrücke $\frac{1}{\varrho}(A_{ik} - A_{ki})$ und $\frac{1}{\varrho}(B_{ik} - B_{ki})$ ganz entsprechend als lineare Kombinationen von $A'_{ik} - A'_{ki}$ und $B'_{ik} - B'_{ki}$ ergeben.

§ 5. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \overline{\overline{+}} (S_2)$ ist und die keine Zwischenintegrale besitzt.

Um uns im folgenden der Lieschen Theorie der Funktionengruppen bedienen zu können, ist es zweckmäßig, an Stelle der Variabeln $x_1 x_2 x_3 z p_1 p_2 p_3$ neue, homogene Variabeln einzuführen vermöge der Substitution:

$$y_1 = x_1;\quad y_2 = x_2;\quad y_3 = x_3;\quad y_4 = z;\quad q_1 = -p_1 q_4;$$
$$q_2 = -p_2 q_4;\quad q_3 = -p_3 q_3;\quad q_4 = q_4.$$

Durch Einführung dieser Variabeln gehe das System (S_1) über in:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{X}_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{q_1}{q_4}\frac{\partial f}{\partial y_4} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\bar{B}_{11}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\bar{B}_{21}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\bar{B}_{31}}{\bar{C}} = 0\\
\bar{X}_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{q_2}{q_4}\frac{\partial f}{\partial y_4} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\bar{B}_{12}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\bar{B}_{22}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\bar{B}_{32}}{\bar{C}} = 0\\
\bar{X}_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial y_3} - \frac{q_3}{q_4}\frac{\partial f}{\partial y_4} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\bar{B}_{13}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\bar{B}_{23}}{\bar{C}} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\bar{B}_{33}}{\bar{C}} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (\bar{S}_1)$$

wo die Größen $\bar{B}_{ik}$ und $\bar{C}$ in den neuen Variabeln geschrieben sind.

Hiezu kommt noch die Gleichung:

$$E(f) = q_1\frac{\partial f}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial f}{\partial q_2} + q_3\frac{\partial f}{\partial q_3} + q_4\frac{\partial f}{\partial q_4} = 0,$$

da f homogen von nullter Ordnung in den q sein muß.

Hat man ein vollständiges Integrationssystem und ist dasselbe $(8-r)$ gliedrig, wo $r = 0, 1, .. 4$ ist, so hat man bekanntlich r erste Integrale: $u_i = a_i$; dieselben sind Funktionen nullter Ordnung und bilden eine Funktionengruppe G. Die Glieder der zugehörigen Polargruppe G' stellen die Integrale des sogenannten Polarsystems dar; dasselbe erhält man, indem man die $(8-r)$ Glieder des vorigen Systems nach $\frac{\partial f}{\partial \pi_{r+1}}, .. \frac{\partial f}{\partial \pi_8}$ auflöst, wo die $\pi_1, \cdot\cdot \pi_8$ die 8 Variabeln: y_i, q_i in irgend welcher Reihenfolge darstellen sollen.

Die so erhaltenen Werte für $\frac{\partial f}{\partial \pi_{r+1}} \cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial \pi_8}$ setzt man nun in den Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial q}{\partial q_i} \right)$$

ein und setzt die Koeffizienten von $\frac{\partial f}{\partial \pi_1} \cdot\cdot\cdot \frac{\partial f}{\partial \pi_r}$ gleich Null. Auf diese Weise erhält man das r gliedrige vollständige Polarsystem. Unter den Gliedern der $(8-r)$ gliedrigen Polargruppe wird es Glieder geben, die homogen von nullter Ordnung sind und solche, die es nicht sind. Es leuchtet ein, daß die homogenen Glieder zugleich Integrale des Systems (S_2) sind; wir hätten diese also auch aus dem System $(\bar{S}_2)$ erhalten können, während die Funktionen, die nicht von nullter Ordnung sind, nur aus dem Polarsystem gewonnen werden können.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir auf die eigentliche Transformation eingehen.

1. Fall.

Es existiert ein 1. Integral: $\bar{u}(y_1 y_2 y_3 y_4 q_1 q_2 q_3 q_4) = \bar{a}$.

Setzt man: $\bar{u} = Y_1$, so kann man nach einem bekannten Satze die 8 gliedrige homogene Funktionengruppe:

$$Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$$

konstruieren, so daß:

$$y'_i = Y_i; \; q'_i = Q_{i \mid i=1,2,3,4.}$$

eine homogene Berührungstransformation darstellt.

Wenden wir diese Berührungstransformation auf unsere in homogenen Variabeln geschriebene Differentialgleichung an, so gehen, wie wir schon gesehen haben, die Systeme $(\bar{S}_1)$ und $(\bar{S}_2)$ in die entsprechenden Systeme (S'_1) und (S'_2) über und die 1. Integrale der vorgelegten Gleichung gehen in die 1. Integrale der transformierten Gleichung über.

Die transformierte Gleichung muß also das 1. Integral $y'_1 = \bar{a}'$ oder in nicht homogenen Variabeln das 1. Integral $x'_1 = a'$ besitzen.

Das System (S'_1) gibt für $f' = x'_1$ $C = 0$, was jedoch für dieses System nicht der Fall sein darf; es wird also auch nicht zur Lieferung des Integrals $x'_1 = a'$ dienen können, vielmehr wird das System (S'_3) als Integrationssystem in Betracht kommen, da es unter der Voraussetzung, daß $C = 0$ ist, abgeleitet wurde. Für $f' = x'_1$ ergibt sich aus diesem System: $A'_{11} = 0$, $A'_{12} = 0$, $A'_{13} = 0$. Die Bedingungsgleichungen (7) ziehen jedoch noch das Verschwinden von anderen Koeffizienten der transformierten Gleichung nach sich. Es muß nämlich sein:

$$B'_{12} = 0,\ B'_{23} = 0,\ B'_{33} = 0,\ B'_{22} = 0,\ B'_{32} = 0,\ B'_{13} = 0,$$

so daß die transformierte Gleichung lautet:

$$\left.\begin{aligned} A'_{22}p'_{22} + A'_{33}p'_{33} + A'_{21}p'_{12} + A'_{31}p'_{13} + 2A'_{23}p'_{23} \\ + B'_{11}\Delta'_{11} + B'_{21}\Delta'_{12} + B'_{31}\Delta'_{13} + D' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Ganz allgemein sieht man ein, daß das System (S'_1) nicht in Betracht kommt, sobald ein 1. Integral existiert; wir haben also den Satz:

Besitzt eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung I ein 1. Integral, so gibt es stets eine Berührungstransformation, welche diese Gleichung in eine ebensolche verwandelt, für welche $C = 0$ ist.

2. Fall.

Es existieren zwei 1. Integrale: $\bar{u} = \bar{a}$ und $\bar{v} = b$.

Man setzt in diesem Fall, da $[\bar{u}\,\bar{v}] = 0$ ist, $\bar{u} = Y_1$ und $\bar{v} = Y_2$ und konstruiert die 8gliedrige homogene Funktionengruppe:

$$Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4.$$

Die zugehörige Berührungstransformation führt alsdann die 1. Integrale $\bar{u} = \bar{a}$ und $\bar{v} = \bar{b}$ in die Integrale: $y'_1 = \bar{a}'$ und $y'_2 = \bar{b}'$ oder — in nicht homogenen Variabeln geschrieben — $x'_1 = a'$ und $x'_2 = b'$ über.

Wir stellen nun mit dem Integral $x'_1 = a'$, das zu dem System (S'_3) gehört, dieselben Betrachtungen an, wie im vorigen Fall.

Das Integral $x'_2 = b'$ wird von dem System (S'_4) geliefert; setzt man in diesem System: $f' = x'_2$, so erhält man: $A'_{12} = 0$, $A'_{22} = 0$ und $A'_{32} = 0$, womit die Bedingungsgleichungen (7) noch $B'_{11} = 0$ und $B'_{31} = 0$ ergeben.

Die transformierte Gleichung lautet demnach:

$$A'_{33}p'_{33}+A'_{21}p'_{12}+A'_{31}p'_{13}+A'_{23}p'_{23}+B'_{21}\Delta'_{12}+D'=0. \qquad (25)$$

Für die übrigen Fälle, wo keine Zwischenintegrale vorhanden sind, lassen sich keine einfachere Gleichungen herstellen.

§ 6. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \equiv\equiv (S_2)$ ist und die Zwischenintegrale besitzt.

1. Fall.

Es existiert 1 Zwischenintegral: $\chi(u_1 u_2 u_3)=0$.

Man verfährt hier wie im 1. Fall von § 5, wobei man u_2 und u_3 noch gar nicht berücksichtigt; die transformierte Gleichung hat nun das Zwischenintegral $\chi(x'_1 u'_2 u'_3)=0$, wenn u_2 und u_3 durch die angewandte Berührungstransformation in u'_2 und u'_3 übergehen.

Die Koeffizienten der transformierten Gleichung sind gemäß Gleichung (3):

$$\begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ x'_2 x'_3 p'_i \end{vmatrix} = A'_{1i};\ \begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ x'_3 x'_1 p'_i \end{vmatrix} = A'_{2i};\ \begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ x'_1 x'_2 p'_i \end{vmatrix} = A'_{3i};$$

$$\begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ p'_2 p'_3 x'_i \end{vmatrix} = B'_{1i};\ \begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ p'_3 p'_1 x'_i \end{vmatrix} = B'_{2i};\ \begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ p'_1 p'_2 x'_i \end{vmatrix} = B'_{3i};$$

$$\begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ x'_1 x'_2 x'_3 \end{vmatrix} = D' \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} x'_1 u'_2 u'_3 \\ p'_1 p'_2 p'_3 \end{vmatrix} = C'.$$

Man überzeugt sich leicht, daß: $A'_{11}=0$, $A'_{12}=0$, $A'_{13}=0$, $B'_{12}=0$, $B'_{23}=0$, $B'_{33}=0$, $B'_{22}=0$, $B'_{32}=0$, $B'_{13}=0$, $C'=0$ ist. Dies ist einerseits eine Bestätigung der Gleichung (24), andererseits folgt daraus auch die Richtigkeit der am Schluß des vorigen Paragraphen aufgestellten Behauptung.

2. Fall.

Es existiert ein Zwischenintegral: $\chi(u_1 u_2 u_3)=0$, und das Polarsystem hat das Integral: $w=c$.

Man setzt in diesem Fall: $\bar{u}_1 = Y_1$ und $w = Q_4$; die zugehörige Berührungstransformation: $y'_1 = Y_1; \cdots q'_4 = Q_4$ führt alsdann die gegebene Gleichung in eine Gleichung von der Form (24) über. $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ gehören nun der Polargruppe von Q_4 an; außerdem müssen sie von der nullten Ordnung sein. Die Polargruppe von Q_4 enthält aber nur die Glieder:

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ -\frac{Q_1}{Q_4},\ -\frac{Q_2}{Q_4},\ -\frac{Q_3}{Q_4}$$

von nullter Ordnung, folglich können auch u_2 und u_3 nur Funktionen von

$$y'_1,\ y'_2,\ y'_3, -\frac{q'_1}{q'_4},\ -\frac{q'_2}{q'_4},\ -\frac{q'_3}{q'_4}$$

sein, oder u_2 und u_3 können nur Funktionen von $x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2$ und p'_3 sein, d. h. das Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ geht durch obige Berührungstransformation über in:

$$\chi\{x'_1,\ u_2(x'_1 x'_2 x'_3 p'_1 p'_2 p'_3),\ u_3(x'_1 x'_2 x'_3 p'_1 p'_2 p'_3)\} = 0,$$

Man erhält deshalb dieselbe Gleichung wie im vorhergehenden Fall, wobei jedoch in den Koeffizienten A'_{1i} etc.

$$\frac{d}{dx'_i} \text{ durch } \frac{\partial}{\partial x'_i} \text{ ersetzt werden muß.}$$

3. Fall.

Es existiert ein Zwischenintegral: $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ und ein 1. Integral $v_1 = b_1$. ($\bar{v}_1 = \bar{b}_1$ ist zugleich Integral des Polarsystems.)

Man verfährt wie im 2. Fall des vorhergehenden Paragraphen, indem man durch die Berührungstransformation $x'_1 = u_1$, $x'_2 = v_1$ die gegebene Gleichung auf die Form (25) bringt. Es gehören nun die Funktionen $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ der Polargruppe von $\bar{v}_1$ an; außerdem müssen u_2 und u_3 von der nullten Ordnung sein. Die Polargruppe enthält folgende Funktionen nullter Ordnung:

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4, -\frac{Q_1}{Q_4}, -\frac{Q_3}{Q_4};$$

$\bar{u}_4$ und $\bar{u}_3$ sind also Funktionen von

$$y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, -\frac{q'_1}{q'_4}, -\frac{q'_3}{q'_4},$$

oder u_2 und u_3 sind Funktionen von $x'_1,\ x'_2,\ x'_3,\ z',\ p'_1,\ p'_3$.

Das Zwischenintegral lautet demnach:

$$\chi\{x'_1, u'_2(x'_1 x'_2 x'_3 z' p'_1 p'_3),\ u'_3(x'_1 x'_2 x'_3 z' p'_1 p'_3)\} = 0.$$

Die Koeffizienten der transformierten Gleichung bestimmen sich wie auf S. 43, wobei jedoch zu bemerken ist, daß u'_2 und u'_3 frei von p'_2 sind. Man findet, daß $A'_{11} = 0$, $A'_{12} = 0$, $A'_{13} = 0$, $A'_{22} = 0$, $A'_{32} = 0$, $B'_{12} = 0$, $B'_{23} = 0$, $B'_{33} = 0$, $B'_{22} = 0$, $B'_{32} = 0$, $B'_{13} = 0$, $B'_{11} = 0$, $B'_{31} = 0$ und $C' = 0$ ist. Die Gleichung ist also von der Form (25), wie zu erwarten war.

4. Fall.

Es existiert ein Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ und ein 1. Inte-

gral $v_1 = b_1$; außerdem hat das Polarsystem neben der Lösung $\bar{v}_1$ noch das 1. Integral $\bar{w} = c$ und zwar sei: $[\bar{v}\,\bar{w}] \neq 0$.

In diesem Fall setzt man: $\bar{u}_1 = Y_1$; $\bar{v}_1 = Y_2$; $\bar{w} = Q_2$ und konstruiert die Berührungstransformation: $y'_1 = Y_1$; $y'_2 = Y_2$; $q'_2 = Q_2$.

Die Funktionen $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ gehören nun der Polargruppe von Q_2, Y_2 an und müssen von der nullten Ordnung sein; die Glieder der Polargruppe, die von der nullten Ordnung sind, lauten:

$$Y_1,\ Y_3,\ Y_4, -\frac{Q_1}{Q_4}, -\frac{Q_3}{Q_4},$$

d. h. u_2 und u_3 sind Funktionen von x'_1, x'_3, z', p'_1, p'_3 und das Zwischenintegral ist von der Form:

$$\chi\{x'_1,\ u'_2(x'_1 x'_3 z'\, p'_1 p'_3),\ u'_3(x'_1 x'_3 z'\, p'_1 p'_3)\} = 0.$$

Man erhält dieselbe Gleichung wie im vorhergehenden Fall, wenn man:

$$\frac{du_2}{dx_2} \text{ durch } \frac{\partial u_2}{\partial z} p_2 \text{ und } \frac{du_3}{dx_2} \text{ durch } \frac{\partial u_3}{\partial z} p_2 \text{ ersetzt.}$$

5. Fall.

Es existiert ein Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ und ein 1. Integral $v_1 = b_1$; außerdem hat das Polarsystem neben der Lösung $\bar{v}_1$ noch das Integral $w = c$ und zwar sei: $[\bar{w}\,\bar{v}_1] = 0$.

Man setzt $\bar{u}_1 = Y_1$; $\bar{v}_1 = Y_2$; $w = Q_4$ und konstruiert die Berührungstransformation: $y'_1 = Y_1$; $q'_3 = Y_2$ und $q'_4 = Q_4$.

Die Funktionen $\bar{u}_2$ und $\bar{u}_3$ gehören nun der Polargruppe von Q_4, Y_2 an und müssen von nullter Ordnung sein; die Glieder nullter Ordnung der Polargruppe sind aber:

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3, -\frac{Q_1}{Q_4}, -\frac{Q_3}{Q_4},$$

d. h. u_2 und u_3 sind Funktionen von x'_1, x'_2, x'_3, p'_1, p'_2 und das Zwischenintegral ist von der Form:

$$\chi\{x'_1,\ u'_2(x'_1 x'_2 x'_3 p'_1 p'_3),\ u'_3(x'_1 x'_2 x'_3 p'_1 p'_3)\} = 0.$$

Man erhält also dieselbe Gleichung wie im 3. Fall dieses Paragraphen, wobei aber in den Koeffizienten A'_{1i} etc.

$$\frac{d}{dx'_i} \text{ durch } \frac{\partial}{\partial x'_i} \text{ zu ersetzen ist.}$$

Für den Fall, daß außer dem Zwischenintegral $\chi(u_1 u_2 u_3) = 0$ 2 erste Integrale $v_1 = b_1$ und $v_2 = b_2$ vorhanden sind, können wir keine Gleichung angeben, die einfacher wäre, als die vorstehenden.

6. Fall.

Es existieren 2 Zwischenintegrale:

$$\chi(u_1 u_2 u_3) = 0 \text{ und } \chi_1(v_1 v_2 v_3) = 0.$$

Wie man leicht einsieht, ist die von $\bar{u}_1 \bar{u}_2 \bar{u}_3$ bestimmte homogene Gruppe G mindestens 4gliedrig; ebenso ist die durch $\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3$ bestimmte Polargruppe H ebenfalls mindestens 4gliedrig. Da nun G und H zusammen 8 Glieder enthalten, so müssen beide 4gliedrig sein und zwar enthält jede der Gruppen nur 1 ausgezeichnete Funktion, da der Fall von 4 ausgezeichneten Funktionen hier ausgeschlossen ist.

Setzt man also: $\bar{u}_1 = Y_1$ und $\bar{v}_1 = Y_2$, so hat G die Normalform: Y_1, Q_1, Q_3, Q_4, während H die Normalform: Y_2, Q_2, Q_3, Q_4 besitzt. Es sind also u'_2 und u'_3 Funktionen von x'_1, p'_1, p'_3 und v_2 und v_3 sind Funktionen von x'_2, p'_2, p'_3.

Die Zwischenintegrale sind demnach von der Form:

$$\chi\{x'_1,\ u'_2(x'_1 p'_1 p'_3),\ u'_3(x'_1 p'_1 p'_3)\} = 0,$$
$$\chi_1\{x'_2,\ v'_2(x'_2 p'_2 p'_3),\ v'_3(x'_2 p'_2 p'_3)\} = 0.$$

Die zu dem 1. dieser beiden Zwischenintegrale gehörige Monge-Ampèresche Differentialgleichung ist: $B'_{21}\Delta'_{12} = 0$; die zu dem 2. Zwischenintegral gehörige Differentialgleichung ist: $B'_{12}\Delta'_{12} = 0$.

§ 7. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, für die $(S_1) \equiv (S_2)$ ist.

1. Fall.

Es existiert ein 1. Integral: $u_1 = a_1$.

Man verfährt genau, wie im 1. Fall des § 5, wobei aber zu bedenken ist, daß $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$ ist. Es ergibt sich die Gleichung:

$$A'_{22} p'_{22} + A'_{33} p'_{33} + 2A'_{23} p'_{23} + B'_{11}\Delta'_{11} + D' = 0.$$

Der Fall von 2 Integralen liefert keine einfachere Gleichung.

2. Fall.

Es existieren 4 erste Integrale $u_1 = a_1$; $u_2 = a_2$; $u_3 = a_3$; $u_4 = a_4$. Wir verfahren genau, wie im 1. Fall des § 6; da jedoch $A_{ik} = A_{ki}$ und $B_{ik} = B_{ki}$ ist, erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} x'_1 & u'_2 & u'_3 \\ x'_1 & x'_2 & p'_3 \end{pmatrix} \cdot p'_{33} + \begin{pmatrix} x'_1 & u'_2 & u'_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = 0.$$

§ 8. Transformation der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen, die keine 1. Integrale besitzen.

Im 1. Paragraphen dieses Kapitels haben wir gesehen, daß eine beliebige Berührungstransformation die Monge-Ampèresche Differentialgleichung I in die Gleichung $F' \equiv 0$ überführt, wo die p'_{ik}, Δ'_{ik}, Δ' sich als Quotienten von Monge-Ampèreschen Formen darstellen. Nehmen wir anstatt einer beliebigen Berührungstransformation eine Punkttransformation:

$x'_1 = X_1(x_1 x_2 x_3 z)$; $x'_2 = X_2(x_1 x_2 x_3 z)$; $x'_3 = X_3(x_1 x_2 x_3 z)$; $z' = Z(x_1 x_2 x_3 z)$,

so sieht man, daß in allen diesen Monge-Ampèreschen Formen der Koeffizient von Δ verschwindet, mit Ausnahme der Form, die den Zähler von Δ' bildet; nehmen wir nun an, daß für die vorgelegte Differentialgleichung $C = 0$ ist, so ist auch $C' = 0$ und wir haben den Satz:

Jede Monge-Ampèresche Differentialgleichung, für die $C = 0$ ist, geht durch eine Punkttransformation in eine ebensolche Gleichung über.

Die Punkttransformationen haben nun aber die Eigenschaft Punkte in Punkte, Ebenen in Ebenen, Kurven in Kurven und Flächen in Flächen überzuführen; man muß daher aus dem vorhergehenden Satz schließen, daß einige oder alle dieser Gebilde gemeinsame Integralgebilde aller Differentialgleichungen I, für die $C = 0$ ist, sind. Wie man leicht einsieht, ist es ausgeschlossen, daß sämtliche Kurven oder sämtliche Flächen des (4 dimensionalen) Raums gemeinschaftliche Integralgebilde sind; es kann sich also nur noch um die Punkte und Ebenen handeln. Hätten nun alle Gleichungen von der angegebenen Form sowohl die ∞^4 Ebenen als auch die ∞^4 Punkte des Raumes als gemeinschaftliche Integralgebilde, so müßten sich diese Gleichungen auch gegenüber der Legendreschen Transformation, die Punkte in Ebenen und umgekehrt überführt, invariant verhalten. Dies ist jedoch nicht der Fall, vielmehr ist für die transformierte Gleichung $C \neq 0$, wogegen $D = 0$ wird; es können also nur entweder die ∞^4 Punkte oder die ∞^4 Ebenen des Raums gemeinschaftliche Integralgebilde sein. Welche von diesen Gebilden die gemeinschaftlichen sind, entscheiden wir am besten mit Hilfe eines Spezialfalls. Für einen solchen läßt sich mittelst des Lieschen Kriteriums[23]) leicht nachweisen, daß nur die

23) Lie, Drei Kapitel aus dem unvollendeten 2. Bande der Geometrie der Berührungsformationen. Math. Ann. 59. 1904. S. 261.

∞^4 Punkte in Betracht kommen. Wir haben demnach den Satz:

Sämtliche Monge-Ampèresche Differentialgleichungen, für die $C = 0$ ist, haben die ∞^4 Punkte des Raumes als gemeinsame Integralgebilde.

Da, wie schon oben erwähnt wurde, eine solche Differentialgleichung durch die Legendresche Transformation in eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung, für die $D = 0$ ist, verwandelt wird, so folgt hieraus der Satz:

Sämtliche Monge-Ampèresche Differentialgleichungen, für welche $D = 0$ ist, haben die ∞^4 Ebenen des Raums als gemeinsame Integralgebilde; die projektiven Transformationen führen also eine Gleichung I, für welche $D = 0$ ist in eine ebensolche Gleichung über.

Aus den beiden letzten Sätzen geht dann noch der Satz hervor:

Sämtliche Monge-Ampèresche Differentialgleichungen, für die $C = 0$ und $D = 0$ ist, besitzen die ∞^4 Punkte und die ∞^4 Ebenen des Raumes als gemeinsame Integralgebilde; Gleichungen von dieser Form verhalten sich gegenüber den projektiven und dualistischen Transformationen invariant.

Liegt nun eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung vor, für die $C \neq 0$ ist, und kennt man von dieser Differentialgleichung ∞^4 Integralgebilde, d. h, ein vollständiges Integral:

$$F(x_1 x_2 x_3 z a_1 a_2 a_3 a_4) = 0,$$

so lassen sich durch eine Berührungstransformation, deren Bestimmungsgleichung: $F(x_1 x_2 x_3 z x'_1 x'_2 x'_3 z') = 0$ ist, diese ∞^4 Integralgebilde in die ∞^4 Punkte des Raumes transformieren; wie wir oben gesehen haben, muß für die transformierte Gleichung $C = 0$ sein, es besteht also der Satz:

Besitzt eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung I ein vollständiges Integral: $F(x_1 x_2 x_3 z a_1 a_2 a_3 a_4) = 0$, so wird sie durch die durch $F(x_1 x_2 x_3 z x'_1 x'_2 x'_3 z') = 0$ bestimmte Berührungstransformation in eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung verwandelt, für welche C = 0 ist.